E L E C T R O D I N A M I C A   C L A S I C A

Y

R E L A T I V I D A D   E S P E C I A L

Contribución presentada como

T E S I S

para optar el título de

D O C T O R   E N   F I S I C A

por el

Ing. Fidel ALSINA FUERTES

La Plata, Junio, 1951

12970

12.970

PROGRAMA PARA LA REALIZACION DEL TRABAJO CORRESPONDIENTE A LA TESIS FINAL DEL DOCTORADO EN CIENCIAS FISICO-MATEMATICAS SECCION FISICA POR EL SEÑOR FIDEL A. ALSINA

Relación entre la Relatividad y la Electrodinámica clásica.

1º - Antecedentes históricos

El desarrollo histórico de la Electrodinámica desde el Ampere hasta Lorentz.

2º - La relatividad restringida. La mecánica relativista.

El principio de acción y reacción en relatividad.

3º - Ley de fuerzas entre cargas y conductores.

La Plata, 25 de mayo de 1951.

(Firmado): CECILIO J. FERRARI - A.E.RODRIGUEZ - AGUSTIN DURAÑONA Y VEDIA - [illegible] - L.A.SANTALO - M.[illegible].

Es copia.

ANDRES T. LOIZAGA
Secretario Administrativo

FACULTAD DE CIENCIAS
FISICOMATEMATICAS
LA PLATA

(043)
53
A3e

a María,

en su cumpleaños.

......ist aber das grosse Verdienst von
Ampère, und ich glaube hinzufügen zu
dürfen, einer der grössten Fortschritte
der Physik, dass zwischen Electricität
und Magnetismus ein fester Zusammenhang
nachgewiesen ist, sodass man den Magne-
tismus nicht mehr als ein besonderes Agens
zu betrachten braucht, sondern alle
Kräfte, welche gewöhnlich m a g n e t i s c h e
Kräft gennant werden, als e l e c t r o -
d y n a m i s c h e Kräfte ansehen kann.

R. J. E. CLAUSIUS, Wied. Ann., 17, 714; 1882.

I N D I C E   G E N E R A L

III - ELECTRODINAMICA RELATIVISTA

INTRODUCCION

La relatividad especial surgió precisamente de un problema de electrodinámica clásica. Originariamente se llamó "Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento". La relación entre ambas teorías, a que aludimos en el título del presente trabajo, existe pues desde 1905.

Pero no es esa relación, bien conocida, la que trata de estudiarse aquí.

Cuando Einstein redactó su trabajo, la electrodinámica en boga era la de Maxwell-Hertz-Lorentz, que acababa de dar cuenta de la naturaleza electromagnética de la luz, había permitido hallar las ondas radioeléctricas, y había interpretado el desdoblamiento de la línea D del sodio en un débil campo magnético. Fué con <u>ésta</u> electrodinámica con la que la relatividad estuvo desde el primer momento vinculada.

La conexión de que hablamos en las páginas que siguen es anterior. Se refiere a ideas que comenzaron con Ampère y fueron elaboradas luego por Gauss, Weber, Riemann, F. Neumann, L. Lorenz, años antes de que apareciera el famoso Tratado de Maxwell. Esas ideas se reducen a la <u>búsqueda de una ley entre cargas puntuales que generalice la ley de Coulomb, para el caso de cargas en movimiento</u>.

Cuando el progreso experimental mostró, hacia fines del siglo pasado, que la corriente eléctrica estaba <u>en efecto</u>, formada por cargas en movimiento, Lorentz incorporó este hecho a su teoría dándole la vestidura que Maxwell le había diseñado en una época en que se creía probado que la corriente era todo <u>menos</u> cargas en movimiento.

Tratamos de mostrar aquí que la existencia del electrón renueva el interés en esa vieja escuela de pensamiento iniciada por Ampère y Gauss, y que la cinemática relativista hace posible su actualización, obteniéndose todos los resultados de la electrodinámica ordinaria .

Al mismo tiempo, la electrodinámica relativista que resulta aparece como una inesperada aplicación práctica de una teoría que hasta ahora estamos acostumbrados a asociar solamente con velocidades del orden de cientos de miles de kilómetros por segundo; en efecto, los fenómenos así llamados "magnéticos", resultan consecuencia de correcciones relativistas debidas a velocidades de décimas de milímetro por segundo.

El plan del trabajo incluye tres partes. En la primera seguimos ese hilo histórico mencionado, desde su origen hasta el momento de aparecer la relatividad, señalando en cada oportunidad la similitud - o a veces la identidad - entre las expresiones y razonamientos de la llamada escuela "de la acción a distancia", y los resultados relativistas.

Sustentamos también una tesis dentro de esa exposición histórica: que la teoría "de acción a distancia" no es - ni fué nunca - esa construcción "repugnante al espíritu" con que han solido amedrentarnos; antes bien, que en el hecho no ha diferido en nada de la lógica, precisión y resultados de cualquier otra teoría. Bastara aducir que es la teoría con que razonaron Euler, Newton y Laplace, además de los ya citados.

Aunque esta parte del trabajo ocupa buen espacio, la mayor parte son transcripciones de los trabajos originales - en cuanto nos ha sido posible obtenerlos - y nuestra tarea consistió en la selección, la adaptación de símbolos y unidades a una notación uniforme y actual , y algunas frases, pocas, para establecer los nexos y defender nuestro criterio.

La segunda parte contiene todo el formalismo de la mecánica de Einstein, desde sus postulados hasta la vinculación entre impulso y energía. Es esta parte la que originó toda la presente tentativa; en 1948 desarrollé en un curso sobre Relatividad (Univ. de Tucumán) buena parte de los puntos de vista aquí reseñados, y no habiendo encontrado antedecedente en la literatura, publiqué algo de ellos como contribución original (II 54, 55); he hallado luego rastros de puntos de vista similares en H.Weyl (Naturw., 1924) ; los cálculos no habían sido publicados por Weyl, y - en la forma en que aquí los presento, o en otra equivalente - son mucho mas inmediatos que los métodos comunes (Bergmann, Tolman, etc.) para llegar a las ecuaciones dinámicas. Se notará el esquive deliberado de la notación cuadridimensional, herramienta la más elegante de que disponga la relatividad. Quisimos evitar precisamente el poder sugestivo de los cuadrivectores, en un trabajo destinado a presentar enfoque nuevo sobre temas viejos. Los razonamientos que resultan amarran la atención en el problema , sin permitir que simetrías de forma automaticen el lápiz.

Es con mucha preocupación que presentamos el párrafo sobre postulados; contiene una tentativa de dirigir el énfasis hacia el agente físico, leit-motiv de la física actual.

Por fin, la tercera parte desarrolla toda la electrodinámica de las corrientes constantes, sobre la base de los potenciales retardados y la cinemática de Einstein. La omisión de los tetravectores nos impidió caer en el error que recién fuera señalado por Podolsky en 1947 (Phys. Rev.,72, 624, 1947) y es que el vector tetracorriente aplicado a un cluster de electrones no es covariante, debido a que el cluster se deforma de un sistema a otro por la no simultaneidad.

Después de hallar las ecuaciones fundamentales (III §2, §3), hacemos una aplicación a la gravitación (pag. 126) y enseguida damos una serie de ejemplos de aplicación de la electrodinámica. En particular, tratamos el problema de la acción y reacción con potenciales retardados exclusivamente (J.A.Wheeler y R.P.Feynman , Rev.Mod.Ph., 21,425,1949) tratan en cambio de introducir potenciales avanzados para asegurar el principio).

Es este, por cierto, un trabajo incompleto. Representa, sí, la exposición de nuestro punto de vista actual sobre un tema definido. En el III §4 hemos sintetizado los postulados de trabajo que nos han servido, y en el párrafo final, p.158 señalamos los objetivos hacia los cuales nos encaminamos.

Al presentar este pequeño fruto personal a la consideración de mi alma mater, el Departamento de Física de la Universidad Nacional de La Plata, deseo agradecer aquí a todos los que de un modo u otro me han ayudado con sus críticas, observaciones, y consejos, y a los Dres. Obdulio J. Ferrari y Antonio E. Rodríguez muy especialmente, por el vivo interés con que han seguido la marcha de mi tarea.

F. Alsina Fuertes

La Plata, Junio de 1951

I DESARROLLO HISTORICO DE LA ELECTRODINAMICA

Si debiéramos resumir los rasgos más importantes del mundo contemporáneo en lo que se refiere a los conocimientos físicos, para que los entendiera un hombre culto que hubiera nacido antes del siglo I , elegiríamos para él la siguiente información: En el siglo XX ya sabemos obtener y administrar energía no proveniente del trabajo humano, y ya sabemos distribuirla y enviarla a lugares apartados del de su origen.

Nos proponemos exponer a muy grandes rasgos en lo que sigue, el desarrollo histórico del conjunto actual de conocimientos referentes a la hoy llamada Electrodinámica Clásica, es decir, al conjunto de conocimientos que ha permitido transformar la energía térmica o mecánica en la energía eléctrica, o recíprocamente, habilitando así al hombre a disponer en su propia casa de la energía puesta en juego en un sitio distante [redacted] en varios metros o varios miles de kilómetros, y comunicado con ella mediante unos alambres atados por sus extremos , o comunicado [redacted] sin alambre alguno.

Aunque los conocimientos experimentales mas simples provienen , como las propiedades del ámbar frotado y de la magnetita, de varios siglos antes de Cristo, los conocimientos decisivos para el desarrollo de nuestras ideas y nuestra técnica son muchísimo mas recientes, y podemos asociarlos con la primera pila de Volta, en 1800. Nuestro mundo moderno, en el sentido mencionado al comienzo, tiene en estos momentos poco mas de siglo y medio. Porque su otra característica dominante, la obtención de energía mecánica a partir de otras fuentes, está asociada con el patentamiento de la primera máquina de vapor utilizable , que James Watt logró en 1775.

En lo que a electricidad se refiere, los conocimientos desvinculados entre sí que nos fueron legando siglos anteriores han contribuído tan poco de manera efectiva al desarrollo posterior de la ciencia, que aunque el pastor griego Magnus descubrió en 160 a.J.C. que los clavos de hierro de sus sandalias eran atraídos por ciertas piedras - según narra Plinio - la comprensión del ferromagnetismo dentro del esquema actual de la física se logró con Heisenberg en 1926; y aunque Tales ya sabía atraer cuerpos livianos mediante un trozo de ámbar frotado, en el siglo I antes de J.C., la comprensión del fenómeno comenzó a tentarse en el siglo pasado, y todavía no sabemos bien porqué el ámbar frotado crea en su derredor ese campo electrostático, pues no sabemos lo que es un campo electrostático.

Para comparar la importancia de los hallazgos de la época de Volta, Ampére y Faraday, baste recordar que desde la primera pila hasta el descubrimiento de las leyes de la inducción tal y como hoy las conocemos, mediaron menos de cuarenta años. Y en 1873 ya apareció el Treatise on Electricity and Magnetism, de James Clerk Maxwell.--

1.- Los conocimientos en la época de Volta

La atracción o repulsión que mutuamente se ejercen dos pequeños cuerpos eléctricamente cargados y en reposo, era ya bien conocida al concluir el siglo XVIII.

Antes de 1760, Daniel Bernoulli (1700-1782) consiguió mediante un electrómetro establecer la relación cuantitativa entre fuerza y distancia. Debemos la referencia a un médico, Socinus, quien la publicó ese año. En sus palabras: "Eodem usus (el "del electrómetro) est Vir clairissimus, ut determinaret rationem "in que corpora ad electricitis trahuntur, eique visum est, in "ratione reciproca quadrata distantium id fieri, sivis electrici- "tatis maneat eadem.

Hacia 1770, Henry Cavendish halló que la electrificación de los cuerpos era superficial, y dedujo teóricamente de ello que "la fuerza eléctrica de atracción y repulsión es "inversamente proporcional al cuadrado de la distancia", "o, por "hablar con mas propiedad, que la teoría no estaría de acuerdo con "la experiencia si supusiera una váriación según otra ley". Este importantísimo teorema, que permite deducir la ley de fuerzas entre cargas del hecho de que en el interior de una envuelta metálica hueca no existan fuerzas de origen eléctrico, fué sin embargo conocida mucho tiempo después, solamente cuando Maxwell dió a publicidad en 1879 los trabajos inéditos hallados en la mesa de trabajo de Cavendish. En vida, éste no publicó mas que una alusión al exponente 2, en 1771, sin mencionar experiencias.

La ley de atracción de imanes entre sí era también conocida en 1750, cuando J.Michell publicó un "Tratado sobre imanes artificiales", en cuya pág. 17 dice: "The attráction and repulsion of magnets decreasee as the Squares of the Distances from the respective "Poles increase". Tobías Mayer reencontró la ley y la publicó en 1760, en el Göttinger Gelehrter Anzeiger, pág. 633.

Considerando las fechas, resulta evidente la influencia enorme que sobre todos los investigadores ejercía la ley de Newton sobre atracción de masas, publicada en 1687, y primera ley cuantitativa en que se calculan fuerzas ejercidas por cuerpos distantes unos de otros. De haberse conocido entonces otros fenómenos a distancia, fuera de los eléctricos y los magnéticos, no hay duda que de inmediato se hubiera ensayado la misma ley para explicarlos; debemos aguardar hasta 1935 para encontrar una tentativa de introducir una ley distinta entre cuerpos que se atraen a distancia, en el trabajo de Yukawa sobre fuerzas entre partículas nucleares cargadas o no.

Pero a pesar de todos los anteriores precedentes, y debido sobre todo al desinterés de Cavendish sobre la publicidad de sus propios trabajos, la ley fundamental de fuerzas entre cargas o imanes - supuestos puntuales - se conoce universalmente como Ley de Coulomb, hommaaje a quien ideó la suspensión monofilar y dedicó mas de diez años a las verificaciones experimentales de la ley que hoy lleva su nombre. Charles A.Coulomb (1736-1806) publicó su enunciado en

1785. Refirmada así la ley , pasó a ser el fundamento natural del estudio teórico de la electricidad, en manos de Poisson, y su historia posterior corresponde a la historia de la teoría del potencial newtoniano y las funciones armónicas, que satisfacen a la ecuación de Poisson.-

Físicamente, las leyes de Coulomb plantearon, lo mismo que la de Newton, el problema de la acción a distancia: un fenómeno provocado en un punto en un cierto instante, determina la aparición de otro fenómeno a una cierta distancia, <u>prácticamente en el mismo instante</u>.

En lo que respecta a experiencias de laboratorio, las distancias son demasiado cortas para decidir si "realmente" había o no simultaneidad entre causa y efecto; y en lo que respecta a distancias astronómicas, no había mas conocimientos sobre simultaneidad que los que resultaban de los cálculos teóricos de Rømer sobre la falta de regularidad en las ocultaciones del satélite Io de Júpiter (1675), que eran considerados como poco plausibles, y los cálculos de Bradley sobre origen de la aberración estelar, publicados en 1728. Tanto Rømer como Bradley atribuían lo observado a que la luz demora un tiempo finito en propagarse de un astro a otro. De esta manera, en la fecha en que Newton se ocupaba de fundamentar su ley de atracción "a distancia", los escasos datos que había sobre fenómenos distantes parecían confirmar la idea de que era necesario un tiempo finito entre causa y efecto.(*)

De todos modos, la teoría de Newton era en sí misma independiente de la manera en que se considerara la "propagación", y Euler se ocupó explícitamente de demostrar(Prix de l'Académ. de Paris, 1741, pág. 235) que la ley de Newton como ley integral no puede decir nada sobre la forma en que tiene lugar la acción que describe.

El mismo Newton sin embargo se ocupó de este problema ,y dedicó los párrafos finales de sus Principia (1687) a exponer sus

(*) Ver la opinión de Laplace, en pág. 65.

ideas sobre el punto:

"Sería oportuno aquí decir algo sobre el Espíritu (o Eter) su-
"tilísimo (que penetra todos los sólidos y se esconde en su propia
"sustancia), por cuya fuerza y acción las partículas de los diver-
"sos cuerpos se atraen unas a otras a distancia mínima, y de la que
"depende su cohesión. Por él los cuerpos eléctricos actúan a mayor
"distancia atrayendo o repeliendo los corpúsculos vecinos, y por él
" la luz emerge, se refleja, se refracta, se inflexiona y calienta
"los cuerpos.

"Él excita todas nuestras sensaciones y mueve según su volun-
"tad los miembros de los animales, vibrándose y propagándose desde
"los órganos externos de los sentidos hasta el cerebro por medio
"de los nervios, y después del cerebro a los músculos. Pero todo
"esto no puede exponerse en dos palabras, y no se ha hecho aún
"una cantidad de experiencias que baste para determinar exactamente
"las leyes según las cuales obra tal Espíritu."--

Como se vé, no solamente Newton adopta ya las ideas de Rømer y Bradley sobre propagación, sino que las hace suyas, les dá una trascendencia espíritual , y emite clara y categóricamente la hipótesis de que las acciones se propagan en un medio "sutilísimo" que llena todos los intersticios y explica todos los fenómenos a distancia, y que desde ese momento hasta 1905 en que apareció la Relatividad fué conocido con el mismo nombre de éter con que Newton lo designara .

Parece curioso que la ley de Coulomb haya dado origen a la idea de una "acción a distancia" simultánea, cuando está claro que dicha ley fué inspirada por la de Newton, y está última es independiente de toda hipótesis, y su genial creador opinaba que las acciones eran transmitidas por un medio sutil, omnipresente y omnisciente. Sin embargo, tàl es precisamente la situación en la época de fines del siglo XVIII; todos hablan de "actio in distans" sin detenerse a analizar las consecuencias de tal frase, pero rechazándo violentamente el esquema de propagación de Newton.

En nuestra opinión, buena parte de las causas de este rechazo deben ser imputables al sentir general de ese fin de siglo, dominado por la Revolución de 1789 y su filosofía atea.--

Hasta 1800, las únicas experiencias posibles en electricidad eran las que usaban como fuentes varillas de vidrio frotadas, esferas de azufre, o cosas análogas. En 1791 hizo Alois Galvani (1737-1798) su comentado descubrimiento sobre la "electricidad animal", como la llamara, y Alessandro Volta (1745-1802), interesado en dichos fenómenos, comenzó a consecuencia de las teorías de Galvani una serie de trabajos que se coronaron en la construcción de fuentes de electricidad que se parecían mas a los órganos animales de los peces eléctricos que a las barritas suspendidas de seda de sus predecesores. Por esta razón denominó Volta a suinstalación "Organe électrique artificiel".

En 1795 escribía: "Si dos conductores de primera clase to-"can simultáneamente un conductor húmedo y luego se reúnen aque-"llos entre sí,sea directamente, sea mediante un tercero, forman-"do un circuito, el flúido eléctrico se pone en movimiento... y "su circulación continúa mientras no se interrumpe el circuito " en algún punto"... "No se me pregunte todavía cómo; es suficien-"te saber que esto es un hecho, y que el hecho es general".

La primera pila parece haber sido construída en 1800.

De esta manera se recibió la novedad:

"La electricidad, enriquecida con los trabajos de tanto físi-"co distinguido, parecía llegada ya al término en que una cien-"cia no tiene ya pasos importantes que dar"..."Se hubiera podido "creer que todas las investigaciones para diversificar los re-"sultados de la experiencia estaban ya agotadas; y que la teoría "misma no podia perfeccionarse mas que añadiendo mayor grado de "precisión a las aplicaciones de los principios ya conocidos", "cuando Volta..." (del mineràlogo Haüy, que presenció en la Academia de Paris la exposición de Volta en 1801).--

2. La corriente eléctrica . Ampère.

Hasta la época de Volta, los "conductores eléctricos" eran cuerpos redondos, alargados, ovoides, etc. La aparición de la pila eléctrica hizo cómodo conducir la electricidad mediante hilos metálicos, y desde ese momento la palabra "conductor" ha pasado a ser, en el uso diario, casi sinónima de "hilo metálico". Toda la electrodinámica ha consistido en el estudio del comportamiento de hilos metálicos conectados a fuentes eléctricas.

En 1820 Ørsted (1777-1851) halló que una aguja magnética libre de girar en la proximidad de un hilo metálico conectado a una pila, se desviaba de cierta manera. El mismo año J.B.Biot y F.Savart presentaron su determinación cuantitativa del fenómeno y Ampère publicó el primer resultado electrodinámico: atracción de corrientes paralelas y antiparalelas.

J.Chr.Ørsted trabajaba en el asunto desde 1812; consideraba él que en las moléculas del conductor se producían perturbaciones y restauraciones del equilibrio eléctrico, a consecuencia de la conexión con una pila, y suponía que dichas perturbaciones debían propagarse también, cuando eran de mucha "Cantidad" por estar conectada una pila de gran "Intensidad", a los lugares próximos al alambre. Por eso estudiaba los efectos de los conductores sobre los imanes próximos; para tratar de hacer máximas las perturbaciones en el conductor, ponía a éste - un alambre delgado de platino - al rojo.

Cuando fueron conocidas sus experiencias exitosas (Schw. Journ., 29, 275, 1820), muchos investigadores las repitieron; entre ellos de la Rive, en Suiza. Arago presenció la demostración, y a su vuelta a París comunicó la novedad a Gay-Lussac, con quien se puso de inmediato al trabajo, y a André-Marie Ampère. (1775-1836)

Como todos, Ampère comenzó repitiendo las experiencias de Ørsted, pero pronto consiguió preparar un marco móvil mas liviano para estudiar interacción entre "corrientes" y el imán terrestre, y halló así también la atracción entre conductores; todo sucedió dentro del mismo año 1820.

Si Ørsted buscaba influencias y fenómenos en los alrededores de un conductor, es porque ,acostumbrado a las experiencias electrostáticas en que aparecen fuerzas en redor de todos los conductores empleados, no podía imaginar que por el solo hecho de emplearse conductores filiformes en las nuevas experiencias, hubieran de cambiar mucho las cosas. En sus palabras: "Llamamos Conflicto Eléc-"trico a la acción que tiene lugar en este conductor y en el espacio "que lo rodea. El conflicto éste describe círculos"

Vemos que no hay para Ørsted mayor diferencia entre el metal y el espacio adyacente, en lo que se refiere a la "Cantidad" del fenómeno eléctrico. Tenemos ya en germen ideas que pronto habían de cruzar a Inglaterra, para no retornar hasta 1884 al continente, cuando Hertz publicó su primer trabajo sobre la teoría de Maxwell.

Ampère se preocupó, sobre todo, de hallar explicaciones para sus experiencias, que concordaran lo más posible con las ideas de Newton sobre la atracción; de ahí que subdividiera el conductor en"elementos", buscara para ellos una ley de fuerzas en razón inversa del cuadrado de las distancias (lo mismo que Biot-Savart habían hecho) y se preocupara mucho de que sus fórmulas concordaran también con los principios generales de la dinámica newtoniana, sobre todo el de "acción y reacción". Fué él quien introdujo la palabra "Corriente", para separar bien los fenómenos electrostáticos - en los que en efecto interesa la "Cantidad",como diría Ørsted - de los nuevos descubrimientos.

Ampère opina que:"... es una clase de atracciones y de repul-"siones del todo distintas de las atracciones y repulsiones ordi-"narias, que creo haber sido el primero en reconocer, y a las que "he llamado atracciones y repulsiones de las corrientes eléctri-"cas.

... "Estas atracciones y repulsiones de las corrientes eléctri-"cas difieren esencialmente de las que la electricidad produce en "estado de reposo; en primer lugar, cesan en cuanto se interrumpe el circuito de los cuerpos conductores, como las descomposi-

"ciones químicas . En segundo lugar...son los hilos conduc-
"tores paralelos...los que se atraen". Por fin...se atreen o
"repelen en el vacío lo mismo que en el aire."

De esta manera, Ampére descarta el Conflicto Eléctrico de Ørsted con sus espirales entorno de los alambres, y prefiere suponer que los conductores filiformes recorridos por una "Corriente" se comportan de acuerdo a la ley de Newton de acción de elementos sobre elementos. Y en lugar de explicar la acción sobre los imanes por una Atmósfera Magnética que rodeaba los conductores , como sugería nada menos que Seebeck (Berlín, 1820), que acababa de hallar la distribución de limaduras de hierro orientadas en torno de un conductor, en lugar de ello Ampére prefería reducir los imanes también a un problema de elementos de corriente que se atraían o repelían.

En una comunicación de 1822, Ampére estudia: ..."la acción
"mútua entre una corriente eléctrica y el globo terrestre o
"un imán"...y mostrará que entran una y otra en la ley de ac-
"ción mútua de dos corrientes eléctricas,... concibiendo so-
"bre la superficie y en el interior de un imán tantas corrien-
"tes eléctricas, en planos perpendiculares al eje de dicho imán,
"cuantas líneas se puedan concebir formando, sin cortarse mú-
"tuamente, curvas cerradas..."

"Es así como se llega a este resultado inesperado: que los
"fenómenos del imán son producidos únicamente por la electrici-
"dad.--"

Todas las ideas de Ampére se encuentran condensadas en una ecuación, a la que se llega cuando se desea armonizar con las leyes de Newton (fuerza en función de una potencia de la distancia, actuando según la recta de unión de los elementos), los siguientes hechos experimentales admitidos por Ampére:

1. La acción de una corriente mantiene su valor absoluto pero cambia su sentido, al invertirse la corriente.
2. Una corriente lineal se puede reemplazar por una en zig-zag que se aparte poco de la recta, sin efecto apreciable.
3. Una corriente cerrada actúa siempre sobre un elemento según la normal a éste.
4. La acción entre dos elementos no cambia si se aumenta su distancia y su tamaño en igual proporción, sin variar la corriente.

Una vez elegida la unidad para medir corrientes, resulta de manera unívoca la ecuación (deducción en pág. 16)

$$\vec{F} = \frac{i_1 i_2}{c^2} \frac{dl_1 \, dl_2}{r^2} (\cos \varepsilon - 3 \cos \theta_1 \cos \theta_2)$$

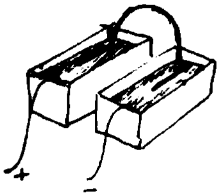
donde r es la distancia entre los elementos dl_1 dl_2, i_1 i_2 sus corrientes, ε el ángulo que los elementos forman entre sí, y θ_1, θ_2 los que forman respectivamente con r. c^2 es una constante.

"Como las conclusiones de Ampére son obligadas, la anterior ley es la <u>única</u> compatible con los hechos admitidos y la idea de que la fuerza depende de la posición relativa de los elementos solamente y actúa sobre la recta de unión".(Sommerfeld)[1]

Es interesante también la opinión que esa fórmula merecía a Maxwell: "...es perfecta en forma é indiscutible en precisión... y deberá quedar siempre como la fórmula cardinal de la electrodinámica" (Treatise, II, 175; 1873).

La ecuación de Ampére indica que dos elementos de corriente paralelos ($\varepsilon = 0$) pueden atraerse o repelerse, según se encuentren enfrentados ($\theta_1 = \theta_2 = 90°$) o alineados ($\theta_1 = \theta_2 = 0$) a la misma distancia r. Para demostrarlo experimentalmente realizó una experiencia - con de la Rive, en Suiza - hoy prácticamente olvidada, pero que se encuentra descripta en casi todos los tratados de Física General del siglo XIX. La resumimos aquí, por ser la primera experiencia en que se emplearon circuitos deformables actuando sobre sí mismos:

(1) Enz. d. Math. Wiss., V, 2, p.13



Un puente de alambre flota sobre dos recipientes conteniendo mercurio. El alambre está aislado, y solamente su punta descubierta, de modo que la corriente eléctrica debe pasar del mercurio al alambre, o viceversa, por los extremos. El elemento de corriente en el mercurio contiguo al contacto, resulta alineado con el elemento inmediato del alambre. Debe haber por lo tanto repulsión entre mercurio y alambre, según la fórmula de Ampére.

En efecto, cerrando el circuito (sobre una batería de unos 4 a 10 volts), el alambre retrocede. Hice la experiencia: conviene mantener el ~~xxxxxxxx~~ alambre suspendido de hilos, de modo que se formen pequeños meniscos en la superficie del mercurio, debido al peso. En estas condiciones es fácil hacerlo retroceder, y también dar pequeños saltos hacia atrás, en los que el alambre se despega momentáneamente del mercurio.

La experiencia es interesante, pero, naturalmente, no demuestra nada pues estamos empleando un circuito completo en lugar de elementos aislados. Esta es la razón por la que dejó de mencionársela en los textos. Por otra parte, los "elementos" de Ampère son, como los puntos materiales de Newton a los que imitan, abstracciones que solo tienen sentido una vez bajo el signo integral.-

En los mismos años en que trabajaba Ampère, Georg Simon Ohm (1787-1854) se ocupaba de relacionar el valor de las corrientes con la fuerza electromotriz (nombre ideado por Volta en oposición a la fuerza ponderomotriz característica de los fenómenos electrostáticos) de las pilas que la producían. El dispositivo sensible que empleaba era medir la Intensidad de la fuerza que la corriente ejercía sobre un imán próximo, suspendido como en las experiencias de Coulomb. La frase "Intensidad de la fuerza magnética que sobre el imán ejerce la corriente", introducida por Ohm, se ha abreviado en el uso a la actual y poco adecuada "Intensidad de la corriente ". Los trabajos de Ohm aparecieron en 1825 y 1826.-

Texto sigue en pág 18.

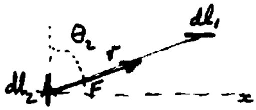
Nota sobre la deducción de la ley elemental de Ampére.

Los hechos admitidos 1. y 4., permiten escribir a la ley elemental en la forma

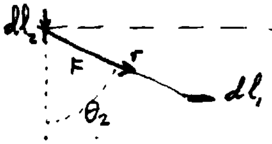
$$F = \frac{i_1\, dl_1\, i_2\, dl_2}{k^2 r^2}\, f(\varepsilon; \theta_1; \theta_2)$$

donde k^2 es una constante que dependerá de las unidades adoptadas, y f depende de los cosenos de los ángulos.

Por otra parte, puede probarse que la acción entre dos elementos normales entre sí, debe ser nula si uno es normal a r. Consideremos, en efecto, los elementos de la figura, que se ejercen una cierta fuerza en la dirección de r.



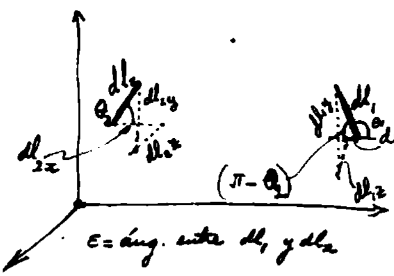
Si dibujamos un sistema que sea simétrico del anterior respecto al eje de las x, tendrá la corriente i_2 en sentido inverso, pero la fuerza será de módulo igual que en el caso primitivo.



Hagamos ahora tender θ_2 a 90°; la fuerza va poniéndose normal a dl_2, y continúa siendo de igual módulo en los dos sistemas (directo y simétrico).

Cuando θ_2 sea 90°, la fuerza deberá ser, por continuidad, la misma en los dos casos, mientras que por el postulado 1. debe ser de sentidos contrarios. En consecuencia, debe anularse, como queríamos probar.-

Falta determinar la forma de la función f . Para hacerlo, consideramos dos elementos con cualquier orientación, elegimos un sistema de coordenadas cartesiano con el eje x a lo largo de la recta r , y descomponemos dl_1 y dl_2 en sus componentes ortogonales en ese sistema, lo que en virtud del postulado 2. es completamente equivalente.



La fuerza F se obtiene por suma de 9 fuerzas, (cada componente de dl_2 tiene aplicadas tres fuerzas) todas dirigidas según r. Pero de ellas, solo serán distintas de cero las que dl_{1x} ejerce sobre dl_{2x}, la de dl_{1y} sobre dl_{2y}, y la de dl_{1z} sobre dl_{2z}. Todas las demás provienen de elementos normales entre sí con uno normal a r, y se anulan por lo recién demostrado.

La fuerza total F contiene pues tres sumandos distintos de cero, que pueden escribirse, con notación inmediata,

$$F = \frac{i_1 i_2}{k^2 r^2}\left[dl_{1x}\, dl_{2x}\, f(1;1;1) + dl_{1y}\, dl_{2y}\, f(1;0;0) + dl_{1z}\, dl_{2z}\, f(1;0;0)\right]$$

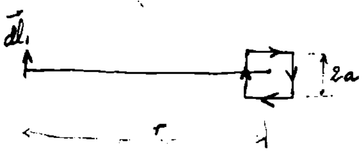
ó también, como $\vec{dl}_1 \cdot \vec{dl}_2 = dl_1\, dl_2 \cos\varepsilon$, $dl_{1x} = dl_1 \cos\theta_1$, $dl_{2x} = dl_2 \cos\theta_2$

$$F = \frac{f(1;0;0)}{k^2}\,\frac{i_1 i_2}{r^2}\left[\cos\theta_1 \cos\theta_2 \left(\frac{f(1;1;1)}{f(1;0;0)} - 1\right) + \cos\varepsilon\right] dl_1\, dl_2$$

la que puede escribirse, abreviando,

$$F = \frac{i_1 i_2}{c^2 r^2}\left[K \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\varepsilon\right] dl_1\, dl_2$$

Como c^2 dependerá en definitiva de las unidades que se adopten, solo nos queda por estudiar el valor de K. Para determinar K, analicemos la acción de todo el circuito de la figura, sobre el elemento dl_1.



La fuerza que sobre él se ejerce es

$$F_1 = \frac{i_1 i_2}{c^2}\, dl_1\, dl_2 \left[\frac{1}{(r-a)^2} - \frac{1}{(r+a)^2} + 2\frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}}\,\frac{K}{r^2+a^2}\right]$$

y está dirigida según el eje x; los dos primeros sumandos son la contribución de los elementos paralelos a dl_1; el tercero es la suma de las componentes según x, de las fuerzas que ejercen los elementos normales a dl_1. Si a es pequeña frente a r, tendremos

$$F_1 = \frac{i_1 i_2}{c^2}\, dl_1\, dl_2\, \frac{2a}{r^3}\left[2 + K\right]$$

Hagamos ahora girar el elemento dl_1, sin desplazarlo, como en la figura siguiente. La fuerza que sufre se calcula, tomando en cuenta que es normal a dl_1, por hipótesis, y despreciando potencias de a/r:

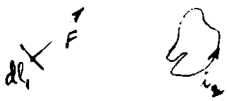
$$F_1 = \frac{i_1 i_2}{c^2}\, dl_1\, dl_2\, \frac{2a}{r^3}\left[K + 1\right]$$

Comparando esta fuerza con la obtenida antes, observamos que sus módulos son iguales si, y sólo si,

$$|K+1| = |2+K|, \text{ lo que exige } \quad \boxed{K = -\frac{3}{2}}$$

con lo que hemos completado la fórmula de Ampére.--

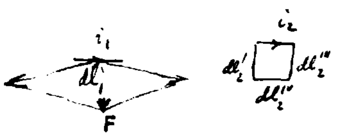
La fórmula de Ampère permite calcular la acción de un arrollamiento ("Solenoide", según Ampère) sobre un elemento de corriente.



Se encuentra entonces que un circuito cerrado ejerce sobre un elemento dl_1 cualquiera una fuerza que está siempre a 90° de dl_1.

Mostraremos con un ejemplo sencillo:

Tengamos un pequeño circuito cuadrangular, con corriente de intensidad i_2, que actúa sobre el elemento dl_1

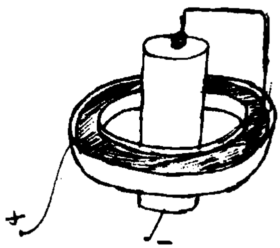


dispuesto como indica la figura. Debemos sumar vectorialmente las fuerzas originadas por cada lado del cuadrángulo; pero los lados normales a dl_1 dan fuerzas nulas ($\varepsilon' = \varepsilon''' = 90°$; $\theta_2' = \theta_2''' = 90°$), de modo que quedan solamente los lados paralelos a dl_1, que por simetría dan fuerzas iguales en módulo , igualmente inclinadas de un lado y otro de dl_1, pero apuntando en distinto sentido debido a que la corriente en dl_2'' es opuesta a la de dl_2^{iv}.-

Este fué el comienzo de las "fuerzas a 90°" que desde entonces caracterizan a la electrodinámica. ¿Tiene un sentido físico esa fuerza actuando a 90° del elemento dl_1 ? ¿Podría idearse una experiencia en que un solenoide hiciera <u>girar</u> en su derredor un elemento de corriente, dispuesto como en la figura?

En 1821 ya eran conocidas en Inglaterra las experiencias de Ampère del año anterior, sus primeras ideas y su equivalencia entre "solenoides" é imanes. Wollaston opinaba - influenciado por Ørsted - que existían flúidos magnéticos y eléctricos en rotación en torno de corrientes é imanes. Por esas razones, cuando el joven ayudante de H.Davy en la Royal Institution tuvo que preparar un artículo para "Annals of Philosophy" sobre historia del electromagnetismo, comenzó por repetir todas las experiencias conocidas de Ampère, y se detuvo ante esa curiosa posibilidad de rotación indefinida de una corriente en torno de un polo magnético.

Esa es la primera experiencia sobre eléctrodinámica que publicó Michael Faraday (Ann.Chim.Phys.,18, 337;1821), en la misma forma que hoy la realizamos en el aula: sobre un imán vertical apoya un



conductor acodado dos veces, cuya otra extremidad está sumergida en un aro de mercurio para serrar el circuito eléctrico.

Ampére la repitió de manera mas sobria, usando solamente un imán, que hacía flotar verticalmente sumergido hasta la mitad en mercurio- lastrado al efecto con platino -. La corriente circulaba por el mismo imán, que giraba sobre su eje por acción de su corriente sobre su magnetismo.-

Suelen tomarse precisamente a Ampere y a Faraday como fundadores de las escuelas de la "acción a distancia" y"acción por contigüidad",respectivamente . Por eso nos hemos detenido en esas primeras experiencias, en donde ambos opinan y hacen lo mismo, pero creyendo sin embargo que la explicación del otro es la falsa.

Ampére estaba apegado al conespto newtoniano de fuerza, y de "igualdad entre acción y reacción"; pero ya hemos señalado que Euler mostró que de esas leyes no puede deducirse la forma en que se propaga la acción. La demostración experimental para el caso de la electrodinámica, la da precisamente el hecho de que Faraday, razonando sobre las ideas - muy confusas - de contigüidad de Ørsted y Wollaston, y desinteresándose de la "acción y reacción", llegó exactamente a las mismas consecuencias que el francés.

Podemos mirar la situación a la luz de los resultados relativistas : la velocidad de propagación del agente físico es en esas experiencias finita, como hubiera creído Faraday, pero muy grande, como necesitaba Ampère. Ninguna importancia tiene el tiempo de propagación en esas experiencias, a no ser que podamos probar que a consecuencia de ello la cinemática se modifica, las fuerzas son distintas de un sistema o otro, y la ley de Coulomb, base de las experiencias eléctricas, se transforma en la base de las electromagnéticas también.

Este resultado, que creemos haber sido los primeros en utilizar, zanja las diferencias entre ambas escuelas. Veremos que, en efecto, se reencuentran con facilidad las fórmulas de una u otra escuela como consecuencias del mismo punto de vista: toda la electrodinámica no es mas que el estudio sistemático de conductores metálicos filiformes, en los que las cargas negativas se desplazan lentamente y ejercen por ello fuerzas un poco distintas que las positivas fijas.-

3. La inducción electromagnética

1."Llamaremos inducción a la propiedad de la tensión "eléctrica de originar un estado eléctrico contrario en sus in-"mediaciones,... y no parece inapropiado usar el término en sen-"tido mas general, para la fuerza mediante la que las corrientes "eléctricas transforman los cuerpos indiferentes vecinos en cuer-"pos caracterizados".

" 2.Ciertos efectos de la Inducción de las corrientes "eléctricas eran ya conocidos, p.ej. la magnetización (Arago,1820) ...pero no parecía probable que con ello se hubiesen agotado to-"dos los fenómenos..."

" 3.Como por otra parte toda corriente eléctrica está "acompañada de una acción transversal a su propia dirección, se-"gún la hermosa teoría de Ampère u otra sería extremadamente im-"probable que una tal corriente, dentro de su radio de acción, "no produjera en buenos conductores una corriente o una fuerza "equivalente.

" 4. Estas consideraciones, y la esperanza que ellas "alientan de poder crear electricidad mediante el magnetismo "común, me han llevado en diversas oportunidades a realizar ex-

"periencias.... Finalmente he llegado hace poco a resultados decisivos".- (M.Faraday, Experimental Researches on Electricity, Phil. Trans. 1832, serie 1ª)

Desde 1820 se buscaba la inversión del fenómeno de magnetización, es decir, "poder crear electricidad mediante el magnetismo común". El mismo Faraday había anotado en su Diary en 1822: "Transformar magnetismo en electricidad!".- Las experiencias sistemáticas las comenzó en 1825, a consecuencia de haber hallado Arago que un disco de cobre puesto bajo una aguja magnética actuaba como freno para las oscilaciones, y que si se hacía girar el disco de cobre éste era capaz de arrastrar a la aguja a un movimiento giratorio.

Interesado en el problema, Faraday arrolló un alambre aislado sobre un cilindro de madera, y conectó los extremos a un galvanómetro. Sobre el anterior arrolló otro alambre - formando el primer transformador - y conectó con una "bien cargada batería Volta de 10 pares de placas". En la aguja "no se notó la menor desviación"(1825).

Después de muchas repeticiones, observó "que en el momento de la conexión de los alambres con la batería era visible una brusca aunque muy pequeña acción sobre el galvanómetro, y otra similar cuando la conexión era interrumpida "(1831). De inmediato comprobó que acercando un imán se obtenía el mismo resultado.

De esta manera distinguió Faraday tres tipos de inducción: la de la "electricidad común, de las botellas Leyden" (actual inducción "electrostática"), la "Voltainducción", provocada en un "secundario " cuando en el arrollamiento "primario" se intercalaban pilas de Volta, y la "magnetoinducción", provocada por el movimiento de imanes.

Para obtener magnetoinducción, halló necesario mover el conductor de modo que "... corte las curvas magnéticas, es decir, las conocidas líneas en que se ordenan limaduras de hierro sobre "la barra imán, o, todavía, las curvas que tendrían por tangentes "las direcciones de una muy pequeña aguja magnética".

En lo que se refiere a la dirección de las fuerzas que se producen entre imanes y corrientes, Faraday no tiene las preocupaciones de Ampère, de hacer que todo esté de acuerdo con el principio de acción y reacción. Se limita a consignar que "dichas fuerzas "entre corrientes é imanes son las únicas que actúan tangencialmente "en lugar de actuar de manera directa como las demás" , y pasa enseguida a buscar reglas prácticas para deducir su sentido, y esquemas imaginativos para justificarlas.

De sus trabajos sobre electrólisis y sobre la influencia de los dieléctricos en las fuerzas "ordinarias", sacó Faraday la clara impresión de la importancia del medio. Por lo pronto, supuso todos "los cuerpos, de sustancias aisladoras o conductoras, "formados por partículas ,en conjunto, conductoras " (Serie 14ª, 1838).

Cuando una sustancia cargada se acerca a otra neutra, obra "por polarización de las partículas inmediatas, que a su vez obran "sobre las próximas, y éstas otra vez sobre las siguientes, y la "acción se propaga desde el cuerpo excitado hasta el conductor más "próximo..." "Por lo tanto, esta distribución (distribution) solo "puede tener lugar a través de aisladores." "Las partículas de "un dieléctrico aislador pueden compararse a una serie de pequeños "conductores aislados".

De esta manera enuncia Faraday lo que desde entonces se llama "acción por contigüidad" .Porque si un cuerpo electrizado "actúa a distancia sobre otro conductor, "no hay razón para suponer que no actúe sobre los conductores inmediatos, es decir, las partículas del dieléctrico"(Serie 14ª, nº 1680, 1838)

En nuestra opinión tal afirmación en nada se puede vincular con el problema de la <u>propagación</u> del efecto, puesto que Faraday pide que la acción que obra sobre un cuerpo distante sea capaz también de obrar en la inmediata vecindad, pero no pide que obre antes cerca que lejos, sino también. Su modelo de dieléctrico es compatible con la hipótesis de que todas las partículas se polaricen simultáneamente.

Pero su convicción que la materia interpuesta toma parte decisiva en los fenómenos (sea o no simultáneo su efecto!) le llevó a plantearse dos cuestiones: ¿cómo actúa el magnetismo, que es aparentemente independiente del dieléctrico? ¿cómo se explican los fenómenos en el vacío, donde no hay partículas polarizables?

"1710. Pensando más sobre este asunto me pareció de la máxima "importancia poder determinar si la acción lateral que llamamos "magnetismo o acción de distribución de las corrientes eléctricas, "actúa a la distancia por medio de las partículas interpuestas, "como la distribución de la electricidad estática,... o si su ac- "ción a distancia es por completo independiente de tales partí- "culas intermedias."

Pero la experiencia directa indicó que en un circuito secundario aparecían los mismos fenómenos aún cuando el núcleo del transformador estuviera constituído por "aire, azufre, laca, o conductores como cobre u otros metales no magnéticos" (nº 1723)

"nº 1726. Estos resultados, con otros muchos que no merece "la pena describir, llevarían a la conclusión de que ...la sus- "tancia interpuesta y por lo tanto las partículas interpuestas "no tienen nada que ver con los fenómenos. En otras palabras, "que si bien el poder de distribución de la electricidad está- "tica llega a la distancia por la acción de partículas interme- "diarias, en cambio la distribución transversal de corrientes, "que también pueden actuar a la distancia, no es trasmitida por partículas intermediarias.

"1727. Sin embargo, es bien evidente que no es posible "considerar esta conclusión como demostrada..."

Es interesante que el gran experimentador se niegue a admitir sus propias experiencias, y atienda más a su imaginación que a sus ojos, en este punto. Por cierto que no es nuestra esta observación. Ya Maxwell, leyendo sus Experimental Researches halló el primero que "su método de concebir los fenómenos era también un "método matemático, aunque no estuviera presentado en la forma con- "vencional de los símbolos matemáticos... Por ejemplo, con los ojos "de su imaginación Faraday veía líneas de fuerza atravesando todo el "espacio, donde los matemáticos veían centros de fuerza actuando a "distancia. Faraday veía un medio donde los otros no veían nada sal- "vo distancia..." (Treatise, Prefacio, 1873)

Digamos de paso que Maxwell añade: ..."cuando traduje lo "que consideré las ideas de Faraday a una forma matemática, <u>hallé "que en general los resultados de los dos métodos coincidían,...mis- "mos fenómenos ... mismas leyes"</u>. (Subrayado por nosotros)

Volvamos a las tentativas de Faraday de hallar influencia del medio en los fenómenos magnéticos; él sabía que un metal situado en la vecindad de corrientes se encuentra en un estado especial que llamó "electrotónico", consistente en que adquiría la capacidad de generar corriente con solo moverse. Era claro entonces que algún papel jugaba la materia en la vecindad de corrientes, pues "median- "te disposiciones apropiadas es muy fácil demostrar mediante la apa- "rición de efectos eléctricos y magnéticos, el estado peculiar en "que se encuentra. Parece improbable que esta acción sea independien- "te de la sustancia interpuesta. ... Me parece mas apropiado supo- "ner que estas partículas atacadas sirven para continuar la acción "desde el cuerpo inductor hasta el inducido, y actúan por esa comu- "nicación de manera que en el cuerpo inducido no se pierda nin- "guna fuerza de distribución".

"1728. Entonces podría preguntar: cómo se comportan las "partículas de cuerpos aisladores, como aire, azufre, laca,...?

"La respuesta es por ahora solo un gesto osado: hace tiempo que "creo que debe existir en dichos cuerpos un estado peculiar, que "corresponda al que origina corriente en metales y otros conducto-

"res, y como dichos cuerpos son aisladores, debe ser un estado
"de tensión. Me he ocupado de hacer visible dicho estado ...
"sin resultado. Por otra parte, como para producir ese estado se
"requieren corrientes pequeñas [se refiere a las corrientes en
el primario], debe ser de una intensidad extraordinariamente
"chica, de modo que muy bien puede existir y ser encontrado por
"un experimentador mas dotado, aunque no lo haya podido yo hallar

"1729. Por lo tanto, tengo por posible y aún por probable que
"la acción magnética sea trasmitida a la distancia por medio de
"las partículas intermediarias..."

Naturalmente, Faraday no se resigna a creer que sus argumentos para introducir la influencia del medio en electrostática (lo que actúa a distancia puede también y debe actuar de cerca) no sean aplicables al electromagnetismo, y se pregunta si podrá algún día probarse si unas fuerzas y otras son de igual naturaleza o no. (Nos. 1731 al 1736)

La respuesta relativista es que es suficiente aceptar una sola fuerza (por ejemplo la eléctrica) y entonces resulta una pequeña corrección en el caso de cargas en movimiento, lo que origina la "fuerza magnética". Esta pequeña corrección es casi independiente del dieléctrico, debido a que la fuerza eléctrica disminuye en él en la misma medida en que se aumentan los retardos de los relojes.--(ver p. 148)

Mucho menos investigado por Faraday fué el problema de la acción en el vacío , donde no hay, por definición, partículas intermediarias de ninguna acción. Desde luego que para ser consecuente con su idea debió introducir en el vacío un medio adecuado, pero sin detenerse mayormente en sus propiedades:

"3075. Por mi parte, considerando la relación del vacío a la
"fuerza magnética y el carácter general de los fenómenos magné-
"ticos externos al imán, estoy mas inclinado a la idea de que en
"la trasmisión de la fuerza haya una acción, externa al imán,

"que no que los efectos sean puramente atracción y repulsión a "la distancia. Una tal acción puede ser una de las funciones del "éter; pues nada improbable es que, si hay un éter, tenga otros "usos que simplemente el transporte de radiaciones".

Aquí tocamos el punto capital del modelo del éter. Vimos que Newton lo introdujo en la ciencia para transportar sus fuerzas entre cuerpos, debido sobre todo a que se acababa de probar que la luz es un fenómeno que demora en su marcha de un punto a otro; desde ese momento, nunca fueron independientes luz y éter. En la última frase transcripta de Faraday, creemos hallar el eco de los párrafos de Newton en su Escolio General (pág. 9)

A nuestro juicio, Faraday llenó el espacio de líneas de fuerza porque le resultó la mejor forma de razonar sin usar fórmulas, y vinculó esas líneas con propiedades del éter de adquirir tensiones llevado por sus experiencias sobre la importancia de la materia interpuesta, en los fenómenos eléctricos. Una vez el éter introducido, supuso que podría muy bien ser el "mismo" éter por el que se admitía que se propagaba la luz. De esta manera llegamos al punto de vista que había de adoptar y concluir Maxwell.

Pero nada hay aquí que "demuestre" que la acción por contigüidad determina en forma necesaria y suficiente que las acciones se propagan: "Como hemos visto, la teoría de acción directa "a distancia es matemáticamente idéntica con la de acción ~~[illegible]~~ "~~[illegible]~~ a través de un medio, y los fenómenos reales pueden ser "explicados por una teoría tan bien como por la otra, siempre que "se añadan hipótesis convenientes cuando aparezca alguna dificul-"tad". (Maxwell, Treatise, pág. 70).

4. La influencia de Gauss

El método para medición del campo magnético terrestre con una aguja magnética, un imán cualquiera, y dos determinaciones, fué publicado por C.F.Gauss (1777-1855) en 1833. En el título, "Intensitas vis magneticae terrestris in mensuram absolutam revocata", se alude a que las mediciones se expresan de manera "absoluta", en función solamente de unidades de Longitud, Masa, y Tiempo. Es el mismo fundamento que adoptamos todavía.

Una contribución directa a la electrodinámica la hizo Gauss en 1835, aunque quedó inédita entonces: se trata de hallar la ley de atracción entre corrientes paralelas que había descubierto Ampère. Como es una ley en razón inversa del cuadrado de las distancias, Gauss trató de unificarla con la ley electrostática de Coulomb, modificando esta de manera apropiada: "Dos elementos de electricidad en estado de movimiento relativo se atraen "o repelen uno al otro, pero no de la misma manera que si ambos "estuvieran en reposo relativo". (Werke, 5, 616; 1867)

En cuanto hemos podido hallar, es esta la primera tentativa de generalizar la ley de Coulomb para cargas en movimiento (Werke, 5, p.616, 1867) y calcular la atracción de corrientes paralelas por método eléctrico puro (pues Ampère suponía que las atracciones y repulsiones entre corrientes no eran eléctricas sino "del todo distintas"). La fórmula de Gauss es

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left[v_r^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]\right\}$$

donde v_r es la velocidad relativa de las cargas q_1 q_2, y r la distancia que las separa.

Que con esa ecuación se reencuentra la ley de Ampère, lo probó Gauss (ver también Maxwell, Treatise, II, p.483, 1904). Nosotros nos limitaremos a observar que esa expresión coincide con la fórmula relativista que hallamos en pág. 147, en primera aproximación, y haciendo que la carga q_2 esté en movimiento y la q_1 en reposo ($v_1 = 0$ en nuestra ecuación)(*). La fórmula de Gauss está pues

(*) falta un 2 como denominador de v_r^2.

de acuerdo con la relatividad y con este trabajo.

Dicha fórmula cayó en descrédito poco después de ser conocida, debido a la crítica de Helmholtz (Crelle's,72,p.57;1870): como se trata de una fuerza que depende de coordenadas y velocidades , no es conservativa de la energía. Esta crítica es correcta solamente para quien no disponga de la mecánica relativista; porque la energía es también función de la velocidad en ella, y no hay contradicción. Recordemos que el principio de conservación de la energía, de 1847, era ignorado por Gauss cuando hizo su ecuación. Y la relatividad, de 1905, era ignorada por Helmholtz.--

Pero el aporte mayor de Gauss a la teoría electrodinámica lo constituyó su estudio de los"Teoremas Generales referentes a las fuerzas de atracción o repulsión que obran en razón inversa del cuadrado de la distancia" , que apareció como publicación de la Unión Magnética, sociedad creada por Gauss y Weber en 1836, a consecuencia de los trabajos de medición magnética, y para la determinación experimental de valores en todo el globo.

Los "Teoremas Generales ..."de 1840 constituyen lo que hoy conocemos como teoría del potencial newtoniano: el estudio sistemático de las funciones Potenciales que satisfacen la ecuación de Euler $\Delta\varphi=0$. Contienen la demostración rigurosa de la ecuación introducida por Poisson , transformación de integrales de volumen en integrales de superficie, valor medio del potencial, etc.

A la verdad, un estudio semejante había sido hecho ya, en 1828, por G.Green (1793-1841), que lo publicó con el título de "Ensayo de aplicación de las teorías del análisis matemático a la Electricidad y el Magnetismo", y contenía las identidades conocidas hoy con el nombre de su descubridor, la demostración de la unicidad del problema de valores de contorno prefijados, y varias aplicaciones a la técnica.

Pero este trabajo de Green quedó prácticamente desconocido hasta 1850, en que Thomson lo publicó nuevamente. El trabajo de Gauss es considerado por lo tanto como independiente. El antecesor de Gauss, en esto como en tantas otras partes, fué Leonardo Euler, que en el siglo anterior había ya estudiado la ecuación fundamental de la teoría (que injustamente se llama "de Laplace", pues era conocida por Euler treinta años antes).

Un tiempo después, en Marzo 1845, volvió Gauss a ocuparse de electrodinámica, a pedido de su amigo W. Weber, quien le envió un trabajo sobre fuerzas entre cargas en movimiento, y le pidió su opinión. La respuesta está en una carta en la que, después de pedir disculpas por no recordar ya un tema que le había preocupado mucho diez años antes, concluye añorando: " Sin duda habría yo publicado mis investigaciones hace tiempo, de no haberme faltado, "en el momento que las abandoné, lo que consideraba como la clave "fundamental , a saber, la deducción de las fuerzas adicionales "(que se añaden a las acciones entre partículas eléctricas en reposo, cuando estas están en movimiento relativo), a partir de una "acción que (análogamente a la luz) no sea instantánea sino que "se propague en el tiempo.

"Nunca pude encontrarla; pero en cuanto yo recuerde, clausuré "entonces la investigación sin perder del todo la esperanza de hallarla tal vez posteriormente, si bien - si recuerdo bien - con "la convicción subjetiva de que antes sería necesario hacer una "suposición realizable sobre la forma en que la propagación tiene "lugar". (Werke, 5,629; 1867)

Esta carta - muy citada - no puede tomarse como el primer documento para la historia de las ecuaciones de Maxwell, pues la velocidad finita de la luz era admitida desde la época de Newton, como vimos, pero creemos que tanto esa carta como la ecuación para las fuerzas son el primer atisbo de los potenciales retardados que introdujeron Lorenz y Riemann en 1867, y que, incorporados a la relatividad, justifican la expresión de Gauss como una primera aproximación.

Hemos mencionado ya la influencia de Euler sobre Gauss en lo que respecta a la teoría del potencial. Fácil sería señalar también la influencia de Euler sobre Laplace, y Lagrange, y el resto de los matemáticos y físicos de su época; el medio centenar de tomos que constituyen la Opera Omnia de Leonhard Euler (1707-1783) contienen tal vez el mas cuantioso aporte individual que jamás haya recibido la ciencia.

Es oportuno aquí mencionar uno de sus trabajos, poco conocido: El "Anleitung zur Naturlehre" es un tratado de mecánica que debe haber sido escrito por Euler en Berlín, hacia 1745. Por razones desconocidas quedó inédito hasta que Nicholaus Fuss, en 1844, lo encontró y lo publicó. Es de imaginar la sensación que habrá provocado ese hallazgo de una obra de un siglo de antiguedad, totalmente desconocida.

Euler se ocupa en ella del problema de la materia, y distingue entre la materia pesada y la liviana o sutil. Esta última rellena todos los intersticios no ocupados por la otra, y es nada mas que el mismo éter de Newton, [redacted] ahora mas elaborado:

"Capítulo 14. Del éter ó sutil aire celeste.

"105. Todo el espacio del universo que dejen vacío los "cuerpos gruesos que percibimos, está lleno con el antes mencionado "material, que llamaremos éter o aire celeste (Himmelsluft).

"106. El sutil aire celeste se halla en un estado especial, "comprimido muy por encima de su densidad natural, por lo que ejerce " en todos sentidos una fuerza elástica extremadamente grande, y com-"prime todos los cuerpos".

Para Euler no queda ninguna duda sobre el papel que este éter desempeña:

"... como no hay ninguna duda de que los rayos de luz se "propagan a través del éter de una manera similar a como lo hace el "sonido por el aire"...

Pero está el problema de la rigidez del éter:

"...como la velocidad de la luz es varios miles de veces "superior a la del sonido, también la fuerza elástica del éter debe "ser muchas veces superior a la del aire".

"108. Cuando en el éter en reposo se encuentra un cuerpo, éste se halla comprimido por todos sus lados con igual intensidad y las fuerzas que sobre él obran se encuentran en equilibrio,..."

Euler describe después cómo las tensiones y compresiones del éter transmiten la acción sobre los cuerpos (Opera Omnia, Serie III, vol. I, p.112; editada en 1926). No vacila en responsabilizarlo de la gravitación, la electricidad y el magnetismo (esta última afirmación no la hemos podido verificar, por no disponer de esos tomos de la Opera Omnia. La afirmación la tomamos de Nichalaus Fuss, biógrafo de Euler, y prologuista de Opera Omnia; ver Serie I, tomo I, pág. LXVI).

Pero cuando este trabajo de Euler salió a la luz, ya hacía unos diez años que Gauss había dejado de ocuparse de las fuerzas eléctricas precisamente por no poder vincularlas con una propagación a velocidad finita de su Función Potencial, y hasta fines del siglo nadie volvería a tomar el problema en esos términos.-

5. Los conocimientos al promediar el siglo XIX.

Al cumplirse la primera mitad del siglo, la física se había enriquecido con un principio general de una importancia solo comparable a los de Newton.

En 1842 el médico Robert Mayer (1814-1878) lo enunció como el Principio de Conservación de la Fuerza (Liebig Ann., 42) mientras que el fabricante de cerveza James Prescott Joule (1818-1889) lo enunció en Oxford en 1847 como "Conservación de la Energía". Independientemente, el mismo año el joven Hermann von Helmholtz (1821-1894) publicó un folleto sobre el tema, que tituló "Die Erhaltung der Kraft". En los tres casos, la novedad fué recibida con gran indiferencia y recelo; pero la amistad de W.Thomson salvó a Joule y la de Du Bois-Raymond y Jacobi salvó a Helmholtz del desprecio en que sucumbió Mayer.-

Todas las tentativas teóricas de la electrodinámica habían debido hasta esa época discutirse sobre la base de la mecánica de Newton; en adelante, debían respetar también el principio de conservación de la energía.

Recordemos que Ampère incluyó entre las propiedades fundamentales de una ley de acción entre elementos de corriente, la igualdad de acció y reacción, a la manera de Newton. La ley de Ampère, correcta en forma integral, dió lugar a objeciones en su forma diferencial.

En efecto: esa ley conduce a que dos elementos de corriente alineados se repelen uno a otro, mientras que se atraen si están enfrentados, y no se ejercen fuerzas si forman un determinado ángulo. Aunque no es posible realizar experiencias concluyentes al respecto, puesto que no pueden aislarse "elementos de corriente", se planteó la duda de si una mejor interpretación de los postulados de Newton produciría una ley diferencial mas satisfactoria.

H.Grassmann (1809-1872) ideó una generalización del principio de acción y reacción, aplicable precisamente a elementos de línea (Pogg. Ann., 64, p.1 ;1845). Obtuvo un enunciado similar, pero en el que la fuerza que se ejercen dos elementos de corriente está a 90° del elemento pasivo.

No puede considerarse ésto una contradicción a las ideas de Newton, que se referían a puntos materiales y no a líneas. La expresión de la ley elemental de Grassmann, en notación actual, es

$$\vec{F}_1 = -\frac{i_1 i_2}{c^2 r^3}\mu \; \vec{dl}_1 \times (\vec{dl}_2 \times \vec{r})$$

para la fuerza que obra sobre el elemento $\vec{dl}_1$.

Como debe coincidir está fórmula con la de Ampére en el caso real de tener un circuito cerrado, sólo puede diferir de ella en un diferencial total exacto, que no contribuye a la expresión integral.

La demostración de que es así se encuentra en los textos (ver por ej. Collo -Isnardi, Magnetismo, p. 603; 1938).

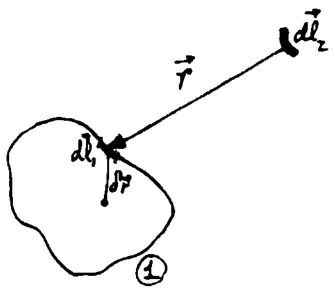
La ley de Grassmann es precisamente la ley relativista que resulta entre elementos de corriente según nuestro trabajo, y en primera aproximación. La expresión completa se halla en pág. 150.

Helmholtz fué el primero en exigir que las leyes electrodinámicas satisficieran a otros principios que los newtonianos o sus generalizaciones. En su primer trabajo (Erhaltung der Kraft, p.67,1847) mostró que el principio de conservación de la energía permitía encontrar las leyes de la inducción, en la forma que les había dado Franz Neumann (1798-1895) en su trabajo sobre "Las leyes matemáticas de la corriente inducida", publicado en Berlín dos años antes.

Este inesperado acatamiento a un nuevo principio general produjo, una vez aceptado, el mismo efecto que el acatamiento al principio de acción y reacción produjera en época de Ampére: se revisaron todas las fórmulas en uso, para seleccionar aquellas que respetaran la conservación de la energía, principio erigido desde esa fecha - hasta la presente - en la más cómoda piedra de toque para cualquier expresión física.

Las "leyes matemáticas" que mencionara F.E.Neumann en 1845, constituyen un esfuerzo para vincular los hechos experimentales hallados por Faraday, la ley de E.Lenz sobre los mismos (Ann.Phys.Chem., 31,p.483, 1834) y la ya citada ley de Ohm.

El razonamiento de Neumann, que incluyó por primera vez el concepto de potencial en problemas electrodinámicos, es - en notación y unidades actuales - el siguiente:



Un elemento $\vec{dl}_2$ actúa sobre todo el circuito 1, con una fuerza que vale, tanto con la fórmula de Ampére como con la de Grassmann:

$$\vec{F}_1 = \frac{i_1 i_2}{c^2} \oint_1 \vec{dl}_1 \times \left(\vec{dl}_2 \times \frac{\vec{r}}{r^3}\right)$$

Desplacemos ahora cada elemento del circuito 1 en un $\delta\vec{r}$ arbitrario. Suponiendo el movimiento lento comparado, como dijo Neumann, con "la velocidad de propagación de la electricidad", el trabajo que la fuerza realiza vale

$$\delta T = \frac{i_1 i_2}{c^2} \left\{ \oint_1 (\vec{dl}_2 \cdot \delta\vec{r}) \left(\frac{\vec{dl}_1 \cdot \vec{r}}{r^3} \right) - \oint_1 \left(\frac{\vec{r} \cdot \delta\vec{r}}{r^3} \right) (\vec{dl}_1 \cdot \vec{dl}_2) \right\}$$

Obsérvese que en la figura hemos usado un vector $\vec{r}$ con la base en el elemento $\vec{dl}_2$, que se mantiene fijo; por eso cambiamos el signo a la fórmula, escrita en pág. para $\vec{r}$ apoyado en $\vec{dl}_1$.

Por ser $\vec{dl}_2$ fijo, $\vec{dl}_1 = \vec{dr}$, y además

$$d\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}}{r^3} \qquad \delta\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r} \cdot \delta\vec{r}}{r^3}$$

de modo que el trabajo total puede escribirse

$$\delta T = -\frac{i_1 i_2}{c^2} \left\{ \oint_1 (\vec{dl}_2 \cdot \delta\vec{r})\, d\left(\frac{1}{r}\right) - \oint_1 (\vec{dl}_1 \cdot \vec{dl}_2)\, \delta\left(\frac{1}{r}\right) \right\}$$

La primera de las integrales así obtenidas puede integrarse por partes en forma inmediata; un término se anula, y queda solamente

$$-\oint_1 \frac{1}{r}\, \delta(\vec{dl}_1 \cdot \vec{dl}_2)$$

con lo que se tiene, por fin

$$\delta T = \frac{i_1 i_2}{c^2} \, \delta \oint \frac{\vec{dl_1} \cdot \vec{dl_2}}{r}$$

La expresión integral depende solamente de la geometría de los conductores; es el "coeficiente de inducción mútua" entre el elemento dl_2 y el circuito 1. El coeficiente de inducción mútua entre dos circuitos completos resulta por una doble integración, en la forma bien conocida en que se lo emplea hoy.

Desde el punto de vista relativista la expresión de Neumann, y por lo tanto, el coeficiente de inducción (mútua entre dos circuitos o propia de un circuito sobre sí mismo) es una primera aproximación, suficiente para las aplicaciones; faltan en ella términos que contienen c^{-4} y superiores.(*)

El empleo de la fórmula de Neumann para reencontrar las leyes de la inducción de Faraday, empleando el principio de conservación de la energía en la forma preconizada por Helmholtz, es hoy del dominio de la enseñanza elemental, y no debe demorarnos aquí.

La interpretación obvia de esto - según el mismo Neumann - es que entre dos circuitos existe una cierta energía potencial, que depende de las inténsidades y de la geometría. La variación de esta energía potencial, sea por variación de una de las corrientes o por deformación de los circuitos, provoca la aparición de trabajo eléctrico.

Según esto, un conductor sin corriente colocado en la vecindad de un circuito recorrido por una cierta intensidad, tiene una propiedad peculiar: está predispuesto a que por él circule una corriente ante la menor modificación del sistema.

Hallamos de este modo que la búsqueda de leyes de fuerzas de tipo elemental, a la manera de las Newtonianas, y que obran por así decir "a distancia", condujo finalmente como mera consecuencia matemática a asignar ciertas propiedades al espacio que rodea a los conductores.

(*) Esta afirmación es provisoria. El cálculo no lo incluí en esta Tesis.

No hay diferencia conceptual entre la función Potencial, que en manos de Gauss y de Neumann describe propiedades espaciales de manera matemática, y el estado electrotónico y las líneas de fuerza que en manos de Faraday describen lo mismo sin emplear fórmulas explícitas.

"Mediante experiencias, guiado (Faraday) por intensa aplicación "inteligente pero sin la ayuda de cálculos matemáticos, llegó a "reconocer la existencia de algo que ahora sabemos que es una "variable matemática, y que hasta puede considerarse la magnitud "fundamental de la teoría del electromagnetismo. Pero como llegó " a ella por vía experimental, le asignó existencia física, y supuso que fuera una peculiar condición de la materia...

"Otros investigadores llegaron mucho después a la misma idea "por camino puramente matemático, pero, en cuanto yo sepa, ninguno de ellos reconoció en la refinada idea matemática del potencial de dos circuitos, la audaz hipótesis de Faraday de un estado electrotónico"(Maxwell,Treatise, II, p.187 3ª Ed.)

Desde el punto de vista de la importancia del espacio que rodea a los circuitos y de sus propiedades, vemos que no hay diferencia de opinión entre la teoría de "acción a distancia" y la de "acción por contiguidad". Continuamos empleando estas designaciones sintéticas, pero han dejado ya de ser antinómicas.

Hemos visto el apoyo que para el trabajo de Neumann significó "La Conservación de la Fuerza" de Helmholtz, al unificar la electrodinámica con teoremas energéticos. Pero el mismo vigor que favoreció a Neumann atacó las teorías de Gauss y Weber, y por las mismas razones:

El potencial es una función de coordenadas solamente, si es que ha de definir un campo conservativo de la energía. Los potenciales de Gauss y de Weber - del que enseguida nos ocuparemos, incluyen términos que dependen de la velocidad de las cargas. En consecuencia, dichos potenciales incluyen fuerzas de tipo no posicional, y Helmholtz probó que, con la mecánica de Newton, conducen a creación o aniquilación indefinida de energía. Ya hemos aclarado, en conexión con la fórmula de Gauss de atracción entre cargas móviles, que ella no es mas que una primera aproximación a la fórmula relativista, y de ningún modo contraria a la mecánica de Einstein, en la que la energía también depende de la velocidad. La misma observación cabe para la fórmula propuesta por Wilhelm Weber (1804-1891), que en unidades actuales es

$$\vec{F}_1 = \frac{q_1 q_2}{r^2}\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(r\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right)\right]$$

Esta fórmula fué en verdad la primera generalización de la ley de Coulomb que se conoció (Abh. z.Begrund. d. sach. Ges., p.269, 1846) para cargas en movimiento, pues la de Gauss no había sido dada a publicidad por las razones que él mismo le escribiera a Weber (ver pág. 29).

Weber obtuvo su expresión por tanteo, probando a apartarse lo mínimo de la ley de Ampére para poder dar cuenta también de las leyes de la inducción. No es necesario comentar aquí su ecuación, pues para el caso de cargas en movimiento uniforme - único del que nos ocupamos - dicha ecuación se convierte en la misma de Gauss, como se comprueba directamente con solo efectuar las operaciones en ella indicadas. Por lotanto, es también casi la ley relativista de acción sobre una carga en reposo, escrita en primera aproximación.

Que esa fórmula reproduce las leyes de inducción, lo demostró su mismo autor. Pero los ataques de Helmholtz sobre la base de incumplimiento de la conservación de energía, dieron principio a una larga discusión en la que Helmholtz buscaba casos concretos en que la ley condujera a infinitos de energía, y Weber respondía que tales ejemplos no correspondían a ninguna realidad observable. La controversia sobre la validez de la ley se prolongó hasta 1880 por lo menos, y en ella tomaron parte también Riemann, C.Neumann, Zöllner, Clausius,etc.

Es interesante que nunca pudo hallarse una convincente razón en contra de dicha ley. En 1902, historiando el problema, Reiff y Sommerfeld escriben : "Al parecer, las discusiones sobre "la ley de Weber no han llegado a un resultado positivo. Los pro "y los contra van poco a poco desdibujándose, debido a que por "lo apropiado del tratamiento de Faraday-Maxwell, va perdiéndose "el interés por la cuestión de la forma de una apropiada ley puntual "que abarque a la de Coulomb" (Enz.d. Math.Wiss., V,2,p. 44)

La oportunidad para prestar atención a "una apropiada ley de fuerzas entre puntos materiales" se presentó pocos años después, al finalizar el siglo, con el descubrimiento del electrón. Pero la primera memoria de Einstein sobre relatividad fué enseguida un apoyo tan grande a las ecuaciones de Maxwell, que todo otro camino fué de inmediato abandonado.

Es interesante sin embargo que las ideas de Maxwell surgieron, a su vez, a consecuencia de los puntos de vista de Weber.(*) En efecto, éste siempre consideró que la carga eléctrica en movimiento era la que daba origen a la corriente eléctrica :

"La comparación de las acciones de una cadena galvánica cerra- "da con las acciones de la corriente de descarga de la electrici- "dad libre acumulada, conducen a la hipótesis de que estas accio- "nes se deben a un movimiento de la electricidad en el circuito" (W.Weber y R.Kohlrausch, Pogg.Ann., 99, p.10, 1856)

Es bien sabido que el descubridor de las leyes de la electrólisis, Faraday, siempre consideró que la corriente en los conductores metálicos era de especie muy distinta, y no involucraba en modo alguno movimiento de cargas, sino un "deslizamiento" o "breakdown of a strain" en el propio material. La corriente era "an axis of power having contrary forces, exactly equal in amount "in contrary directions"(Serie 5, nº 517), y no un flúido que circula (Serie 13, nº 1617).

Esta opinión es tomada al pié de la letra por Maxwell en su Tratado. En todo él se omite casi siempre una alusión a que la corriente eléc-

(*) Nos referimos a la propagación de la electricidad con la velocidad de la luz, (p. 40) trica en un conductor comporte movimiento de cargas. El mismo idioma lleva a Maxwell a decir que la corriente "pasa" por los conductores y "cruza" las uniones, pero siempre reacciona contra una posible interpretación demasiado literal de la "corriente":

"Según la teoría de Fechner y Weber, es una combinación de una "corriente de electricidad positiva con una igual negativa en "dirección opuesta. Es necesario recordar esta extremadamente "artificial hipótesis sobre la constitución de la corriente, "para entender la descripción de algunas de las mas valiosas "experiencias de Weber" (Treatise,I,355)

Al hablar de electrólisis, se aviene Maxwell a mencionar la hipótesis molecular de la electricidad, e introduce "for convenience in description, <u>one molecule of electricity</u>."

Pero a renglón seguido añade: "Esta frase, burda como es, "y fuera de armonía con el resto de este tratado, nos permite por lo menos enunciar de manera clara lo que se sabe sobre electrólisis y apreciar las dificultades principales".

Expone el tema, y concluye " Es extremadamente improbable "que cuando comprendamos la verdadera naturaleza (true nature) "de la electrólisis retengamos la teoría de las cargas moleculares en ninguna forma, porque entonces habremos alcanzado una "base segura sobre la cual formar una verdadera teoría de las "corrientes eléctricas, y nos haremos independientes de estas "teorías provisorias" (Treatise, I,p.260 y 261).

Nos hemos detenido ~~[illegible]~~ aquí debido a que en nuestro trabajo nos apartamos precisamente de Maxwell y Faraday en este punto de vista, pues consideramos la corriente <u>exclusivamente</u> como un movimiento de cargas, y tratamos de ser consecuentes con esa concepción.

Volvamos ahora a Weber, en el que , como dijimos, se encuentra paradojalmente el origen de la propia teoría de Maxwell:

En el trabajo de 1856 citado, Weber y Kohlrausch continúan:

"Consideramos en movimiento la electricidad neutra de los cuerpos que constituyen un circuito, de modo que toda la parte positiva se mueva en conjunto en circuito cerrado, y la negativa en sentido contrario..."

"...así se llega a considerar apropiado que la magnitud de este fluir, la llamada intensidad de corriente, sea porporcional a la cantidad de electricidad que en el mismo tiempo atraviesa la sección transversal del circuito".

La unidad de intensidad que proponen es por lo tanto "la de la corriente que en la unidad de tiempo hace pasar la unidad de carga positiva en una dirección y la unidad de carga negativa en la contraria, a través de una sección cualquiera" (Nótese que resulta el <u>doble</u> de nuestra actual unidad, definida con <u>una</u> sola clase de electricidad).

Es evidente la influencia de Gauss sobre Weber en la forma de tratar los problemas de unidades .

Se trata ahora de saber en qué relación se encuentra esa unidad electrostática, con una unidad electromagnética, definida por ejemplo por la acción de una cierta corriente sobre una aguja magnética, en condiciones especificadas.

El método empleado consistió en descargar una botella de Leyden - cuya carga estática era conocida - sobre el arrollamiento de una brújula de tangentes. La rápida descarga producía una desviación balística de la aguja. Si se hubiera enviado la unidad electromagnética de intensidad sobre la misma bobina, durante un corto lapso, hubiese producido también la misma desviación balística.

El problema a resolver consistió en calcular cuanto tiempo debería fluir la corriente para producir el mismo efecto. De este modo se podía calcular después cuánta cantidad de electricidad había fluído durante la descarga, <u>por segundo</u>, y comparar las unidades.

El resultado, en unidades actuales, fué que la relación entre ambas unidades "absolutas" era una velocidad, c. $3{,}107 \times 10^{10}$ c/s.

Esta constante c es la que ha figurado hasta ahora en todas las ecuaciones electrodinámicas que llevamos transcriptas. De esta manera fué incorporada a la física la mas importante de sus constantes.

Los físicos percibieron de inmediato su trascendencia y su significado: velocidad de propagación de las acciones eléctricas a través del espacio. Pero aunque Riemann propuso ya en 1858 un potencial que se propagaba de un punto a otro con esa velocidad, el más ~~xxxxx~~ certero golpe de vista fué de Maxwell, que en 1862 escribía: "La ve-"locidad de las ondulaciones transversales de nuestro hipotético me-"dio, calculada a partir de las experiencias electromagnéticas de los "Srs. Kohlrausch y Weber, concuerda tan exactamente con la velocidad "de la luz calculada con las experiencias ópticas del Sr. Fizeau, que "difícilmente podemos evitar la inferencia de que la luz consiste en "ondulaciones transversales del mismo medio que es la causa de los fe-"nómenos eléctricos y magnéticos" ("On physical lines of force",III) Phil.Mag. Enero y Febrero 1862).

El "medio hipotético" entraba por fin en ecuación ; su importancia para la electrodinámica iba pronto a ser tan grande, que cuando, en 1894 Drude escribió un tratado de electricidad y magnetismo, lo denominó simplemente "Die Physik des Aethers".-

6. Maxwell

"En cuento al éter, αἰθήρ, he aquí poco mas o menos mi "opinión: como corre sin césar circulando (ἀεὶ θεῖ ῥέων) "alrededor del aire, merece el nombre de ἀειθεήρ (que corre "siempre". (Platón; Cratilo)

Ya hemos señalado en distintos pasajes la importancia que el éter tuvo para Euler y Newton. Según el pasaje anterior, la época de Sócrates (siglo IV a.C.) usaba la palabra; pero nos interesa en particular la opinión de quien lo usó por primera vez en una ecuación diferencial:

"Diferentes teóricos han mantenido la hipótesis del éter "por varias y diferentes razones. Para quienes admitían como principio filosófico la existencia de un "plenum", el horror al vacío era razón suficiente para imaginar un éter que llenase todo el es- "pacio, cualesquiera fueran las objeciones en contra...

"Pero además de estas necesidades altamente metafísicas, el "éter estaba destinado a cumplir misiones mas materiales. Se inven- "tó un éter para que en él se sostuvieran los planetas, otros para "constituir atmósferas eléctricas y efluvios magnéticos, otro para "transportar las sensaciones de una parte a otra de nuestro cuerpo, "y así sucesivamente, hasta que todo el espacio estuvo lleno de dos "o tres clases diferentes de éter. Es preciso recordar toda la in- "fluencia grande y perniciosa que todas esas hipótesis sobre las "clases de éter ejercieron en un principio sobre la ciencia, para "comprender el horror que el éter inspiraba a las personas sensa- "tas del siglo XVIII, y que, a manera de prejuicio hereditario, "alcanzó incluso a John Stuart Mill.

..."el mismo Newton trató, sin embargo, de dar cuenta de la "gravitación por diferencias de presión en el éter; pero no publi- "có su teoría porque no era capaz, partiendo de las experiencias y "de la observación, de dar una explicación satisfactoria de este "medio y de cómo se comporta al producir los fenómenos mas impor- "tantes de la naturaleza.

"Por otra parte, todos los que imaginaban éteres para explicar "fenómenos, eran incapaces de especificar la naturaleza de los "movimientos de dichos medios y no podían probar que con las pro- "piedades que se les atribuían, debían producir los efectos que se "trataba de explicar.

"Sólo ha sobrevivido el éter inventado por Huyghens para "explicar la propagación de la luz" (J.C.Maxwell, Artículo "Eter", en la Encicl. Britann., 9ª Ed.)

Es posible que el "mal servicio" de incorporar el éter a la ciencia se deba concretamente a Aristóteles (opinión de Hoppe), quien lo introdujo como quinto elemento, quinta essentia, al lado de los cuatro elementos de la antigüedad. En todo caso, es sabido que Malebranche y Descartes lo han empleado mas o menos con el mismo sentido: "...De modo que la tierra está en el agua, "el agua en el aire, el aire en el éter y el éter en el firmamento, "pero éste no está en otra cosa. Esta teoría del lugar resuelve to- "das las dificultades..." (Aristóteles, Física, V, Cap. 4)

Menos filosófico que el de Aristóteles, el éter de Maxwell resolvió una sola dificultad.

La idea fundamental en toda la obra de James Clerk Maxwell (1831-1879) es dirigir la atención hacia el medio por el cual se propagan las acciones. Hemos visto que Faraday no concibió otra manera de acción de la electricidad y el magnetismo sino a través de un medio material, que participa de manera activa en el proceso.

Los primeros trabajos de Maxwell (On Faraday's lines of force, 1855,1856; Physical lines of force,1861,1862) tratan de aprovechar a la vez los resultados de Faraday, el trabajo de W. Thomson sobre analogías entre fenómenos eléctricos y elásticos (Camb. math. J., 2, p.61, 1847) y los métodos matemáticos de su profesor Sir William Hamilton, creador del cálculo con cuaterniones.

El enorme esfuerzo matemático y físico realizado por Maxwell, produjo en las primeras tentativas un modelo de éter mecanizado, lleno de ruedas y engranajes:

..."el campo contiene un conjunto de innumerables corpúsculos "giratorios, y entre ellos existe un segundo sistema de partícu- "las, que a modo de ruedas de fricción están acopladas con los "anteriores. En un campo magnético ruedan los corpúsculos del pri- "mer sistema; el segundo sistema permite la transmisión de este "movimiento de un punto a otro, y desempeña además el papel de "un flúido incompresible; una traslación de las ruedas de fric- "ción está acompañada por la rotación de las partículas, no des- "plazables, del primer sistema. Prosiguiendo estas ideas se en- "cuentran, como por otra parte siempre que se intenta una teoría "mecánica, con muy serias dificultades" (H.A.Lorentz., Enz.d. M. Wiss.,V,2,135)

H.Poincaré ya señaló que "leyendo esos trabajos de Maxwell "creeríamos hallarnos en una usina; nos parece oir hasta el rui- "do de las máquinas".

Para indicar el calor con que Maxwell desarrolló su modelo mecánico del éter, baste citar una nota de pié de página en la que indica :" Un dispositivo mecánico similar al aquí presentado existe realmente, y se lo emplea para... "

Años después, Maxwell cristalizó sus ideas en el libro que había de determinar toda la marcha del electromagnetismo hasta la fecha actual : "A Treatise on Electricity and Magnetism" (1a Edición, 1873; 2a,póstuma,1881; 3a, 1904). No hay en él rastros del modelo mecánico que condujo al autor a los resultados definitivos.

No fué nunca unlibro popular, y las ideas que predica fueron muy lentamente incorporándose , tanto en Europa continental, como en la propia Inglaterra. "Más de un hombre se ha lanzado con "pasión al estúdio de la obra de Maxwell, y , aun si no trestabilló en inesperadas dificultades matemáticas, se vió obligado "de todas maneras a abandonar la esperanza de formarse una con- "cepción completamente coherente de las ideas de Maxwell. No me "fué mejor a mí mismo" (H.R.Hertz, [redacted] en

"Electric Waves", p.20)

"Un hombre de ciencia francés, uno de los que más completamente han sondeado el significado de Maxwell, me decía: 'Todo "lo entiendo en el libro; salvo a qué se llama un cuerpo electrizado'" (H.Poincaré)

Antes de reseñar el contenido de la obra, señalaré lo que -en mi opinión - la hace dificultosa al lector:

En primer lugar, lo que ya ha sido muchas veces señalado, Maxwell deduce las leyes del electromagnetismo manipulando formalmente las ecuaciones de la mecánica general al estilo de Hamilton, é "interpretando" después los resultados, sin pretender justificar el camino para hallarlos. Vale la pena recordar que es exactamente el procedimiento que hoy adoptamos en mecánica cuántica.

En segundo lugar, advierte de continuo que la teoría es fenomenológica y no considera a la electricidad como flúido, mientras de continuo se vé obligado por el lenguaje, por las ecuaciones, y por su misma teoría, a tratarla como un flúido incompresible.

En tercer lugar, encuentra su inspiración fundamental en el comportamiento de los dieléctricos materiales , y la aplica luego, sin siquiera advertir el salto , a los fenómenos magnéticos, y al vacío.

Finalmente, el libro no es un "tratado", sino un alegato en favor del método de Faraday, y el método 'alemán' es deliberadamente pospuesto; "He tomado por lo tanto el papel de un abogado antes que el de un juez, y traté mas bien de ejemplificar un método en lugar de dar una descripción imparcial de ambos. No dudo que el método que he llamado 'alemán' hallará también sus defensores, y será expuesto con una maestría digna de su mérito" (Preface, pág. xi)

7.- 'A Treatise on Electricity and Magnetism', tomo I.

Extractamos a continuación los conceptos que nos interesan en el Tratado, enel orden en que fueron introducidos:

Tomo I. a) Electrostática.

"Un trozo de resina y otro de vidrio, ninguno de los cuales exhibe propiedades eléctricas, se frotan entre sí. Tampoco tendrán propiedades eléctricas mientras estén con las superficies frotadas aún en contacto. Pero se atraerán si se separan".

Después de repetir la experiencia con vidrio y vidrio (que se atraen después de frotados ambos con resina), se define: "Estos fenómenos de atracción y repulsión se llaman fenómenos eléctricos, y los cuerpos que losexhiben están electrizados, o cargados con electricidad"(pág.32). Siguen los procesos elementales de electrificación por inducción y contacto, y un conjunto de experiencias que ponen demanifiesto sus propiedades esenciales; pero son experiencias "abstractas", imaginarias: "Las dificultades que habría que superar para realizar muchas de las anteriores experiencias de manera concluyente, son tan grandes, que son casi insuperables"(Nota de W.D.Niven en la pág. 36).(*)

Mediante un electrómetro se puede, por lo menos en principio, verificar la electrificación de un cuerpo, su aumento y su disminución; "La electrificación de un cuerpo es por lo tanto una cantidad física susceptible de medida"...pero "aunque admitamos, como hicimos, el rango de cantidad física para la electricidad, no debemos apresurarnos a suponer que es una sustancia o no lo es, que es o no una forma de la energía, o que pertenezca a categoría alguna conocida de cantidades físicas. Todo lo que hemos probado es que no puede crearse ni destruirse"..."Esto se cumple para la materia, y se expresa por la ecuación conocida como de la continuidad en hidrodinámica" "No se cumple para la cantidad de calor... y tampoco para la energía, si admitimos acción a distancia. Porque un cuerpo fuera de una superficie cerrada puede intercambiar energía con otro dentro de la superficie."

Aquí resulte evidente la influencia de la termodinámica sobre la electricidad; para Maxwell, la conservación de energía com-

(*) Referencias a páginas del Tratado, III Edición.

porta automáticamente la <u>negación del vacío</u> entre dos cuerpos que se ejercen fuerzas; hay "pasaje de energía" entre ambos, imputable "al "resultado de la acción del medio interpuesto."(pág. 39)

Expone enseguida la teoría de los Dos Flúidos y la de Un Flúido, esta última superior a su juicio, "porque no explica demasiado, co-"mo la primera". Pero añade: "Por mi parte, espero mayor claridad so-"bre la naturaleza de la electricidad del estudio de lo que ocurre en "el espacio entre los dos cuerpos. Es... el método de Faraday, y tra-"taré de exponer los resultados de Faraday, W. Thomson, etc., de manera "conexa y matemática de modo que podamos percibir qué fenómenos son "igualmente explicados por todas las teorías, y cuáles indican las pe-"culiares dificultades de cada teoría".(pág.43)

Faraday alcanzó a conocer los primeros resultados de la tentativa, pues Maxwell le envió un trabajo. "Quedé de inmediato sorpren-"dido - le contestó Faraday- de ver concentrarse sobre este tema tan-"to podería matemático, y maravillado después de verlo soportar tan "bien esta prueba". (Carta del 25 de Marzo de 1857).

Continúa el Tratado: "Campo Eléctrico es la porción de espa-"cio en la vecindad de cuerpos electrificados, considerado con referen-"cia a los fenómenos eléctricos. Puede estar ocupado por aire y otros "cuerpos, y puede ser el así llamado vacío, del que hemos retirado to-"da sustancia sobre la que podamos actuar con los medios a nuestra dis-"posición."(pág.47)

"Si investigamos el estado mecánico del medio ... hallamos "que deben encontrarse en estado de tensión mecánica,.(pág. 63)

"A lo largo de las líneas de fuerza hay tensión, y perpendi-"cularmente a ellas presión".

"Un trozo de cuerpo dícese polarizado, cuando adquiere pro-"piedades iguales y contrarias en dos lados opuestos... La polariza-"ción eléctrica de una porción elemental de dieléctrico... es un

estado forzado

"a que se somete el medio por una fuerza electromotriz, y que de-
"saparece con ella. Podemos imaginarlo como un desplazamiento eléc-
"trico, producido por la intensidad electromotriz. Si ésta actúa
"sobre un conductor produce una corriente,...pero en un aislador
...la electricidad se desplaza dentro del medio en la dirección
"de la fuerza electromotriz, en un grado que depende de ésta, de
"modo que el desplazamiento aumenta y disminuye en la misma propor-
"ción en que lo haga la ~~fuerzaxela~~ intensidad electromotriz.

"La magnitud del desplazamiento se mide por la cantidad de
"electricidad que cruza la unidad de área...Esta es, por lo tanto,
"la medida de la polarización eléctrica.

"La analogía entre ...esto y la acción de una fuerza mecá-
"nica común que produce el desplazamiento de un cuerpo elástico
"es tan obvia, que me atreví a ~~ita~~ introducir... el coeficiente de
"elasticidad eléctrica del medio..."

"Las variaciones de desplazamiento eléctrico constituyen
"evidentemente corrientes"

"El valor del desplazamiento a través de una superficie es-
"férica concéntrica con una carga esférica inerior e, es igual
"a esta carga " $[D = e]$.

..." En toda sección de uncircuito cerrado la misma canti-
"dad de electricidad cruza en el mismo tiempo, y esto es así, no
"solamente en el circuito voltaico donde siempre ha sido admitido,
"sino en los casos en que generalmente se suponía que la electri-
"cidad se acumulaba en ciertos lugares".

"Llegamos así a una muy notable consecuencia de la teoría
"que discutimos, a saber, que los movimientos de la eletricidad
"son como los de un fluido incompresible"..

El desplazamiento eléctrico, "according to the Theory adopted in this Treatise", se escribe (con nuestra notación y unidades): $\vec{\mathcal{D}} = \epsilon\, \vec{\mathcal{E}}$ (pág. 76).

La similitud entre esa ecuación y la ley de Hooke, que Maxwell mismo sugiere, es bien evidente. Ese ecuación, y el modelo de un medio elástico que obedece a ella, domina toda la Electrostática.

Las Líneas de Fuerza, cuyas tangentes indican en cada punto el sentido de la fuerza sobre la carga positiva, son llamadas asi en homenaje a Faraday, que introdujo la frase; "en rigor, sin embargo, estas líneas debieran llamarse de inducción eléctrica "(p.98).

La ecuación de Poisson por ejemplo, cobra el aspecto

$$\mathrm{div}\, \vec{\mathcal{D}} = 4\pi\rho$$

si llamamos ρ a la densidad de vólumen de la electricidad. El símbolo div no aparece en el tratado, sino su expresión cartesiana, a la que Maxwell llama la "convergencia" de la función.

Las líneas de fuerza deben forzosamente comenzar y concluir en cargas eléctricas, y los tubos de inducción o "solenoides", cuyas paredes son líneas de fuerza, deben encerrar en su interior una carga total algebraicamente nula: las cargas de las bases son iguales y contrarias.

En esta circunstancia vé Maxwell la expresión matemática de la afirmación de Faraday de que"no es posible comunicar una "carga absoluta" a la materia. Porque cada partícula del dieléctrico tiene cargas iguales y opuestas en sus lados opuestos, si no fuera mas correcto decir que estas cargas són solamente manifestación de un único fenómeno, que podemos llamar Polarización Eléctrica" (p.167).-

Si aplicamos ese concepto de Maxwell a uncondensador plano cargado,con vacío como dieléctrico, encontramos que la única parte del condensador que a Maxwell interesa es el paralelepípedo de vacío, al que considera un dieléctrico, y que es, en este caso, la única "materia" a la cual aplicar el enunciado anterior. Es evidente que este punto de vista no podía ser aceptado sin discusión.

El teorema de Thomson sobre el mínimo de la energía electrostática de un sistema de cargas (Phil.Mag. Feb.1848) permite a Maxwell expresar la energía de un campo electrostático en la forma de una integral de volumen (p.147)

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{D}}\, d\tau$$

que en el caso de dieléctricos isotropos se reduce a

$$W = \int \frac{\varepsilon \mathcal{E}^2}{8\pi}\, d\tau$$

y todo sucede como si el espacio que ocupa el dieléctrico estuviera lleno con un medio incompresible, a presión $p = \frac{\varepsilon \mathcal{E}^2}{8\pi}$.

La fuerza que dos cuerpos electrizados se ejercen - por ejemplo las placas del condensador antes mencionado - se debe poder calcular en función de la tensión a que el medio se encuentra en la vecindad de la placa. Para ello es necesario probar que la integral con que se calculan las fuerzas en el caso de "acción a distancia" puede reducirse a una integral sobre superficies en que intergenga la tensión del medio.

Veamos en detalle cómo se consigue (pág. 155 y sig., en notación actual):

E_1 y E_2 sean dos sistemas de cargas. La fuerza según x que sufre el sistema E_1 por efecto de E_2 , vale

$$F_x = \int_1 \vec{\mathcal{E}}_2\, \rho_1\, d\tau_1$$

si $\vec{\mathcal{E}}_2$ es el ~~potencial~~ campo debido a E_2 y $\rho_1 d\tau_1$ un elemento de carga del sistema E_1 ; la integral se extiende sobre E_1, o cualquier volumen que los contenga y sea sin embaggo exterior a E_2.

Podemos eliminar ρ_1 con la ecuación de Poisson, y escribir la integral

$$F_x = -\frac{1}{4\pi}\int_1 \vec{\mathcal{E}}\, \mathrm{div}\, \vec{\mathcal{E}}_2\, d\tau_1$$

donde $\vec{\mathcal{E}}$ es el ~~potencial~~ campo total $\vec{\mathcal{E}}_1 + \vec{\mathcal{E}}_2$. Con esto hemos añadido la fuerza que el sistema E_1 ejerce sobre sí mismo, que debe ser cero en total "porque la acción de una partícula P sobre otra Q es igual y opuesta a la de Q sobre P ".

Teniendo en cuenta que rot $\vec{\mathcal{E}}$ = 0, podemos transformar ahora

$$F_x = -\frac{1}{4\pi}\int_1 \left\{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{E}_x^2-\mathcal{E}_y^2-\mathcal{E}_z^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{E}_x\mathcal{E}_y + \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{E}_x\mathcal{E}_z\right\} d\tau$$

con lo que, introduciendo las atreviat ras

$$\begin{cases} p_{xx} = \frac{1}{8\pi}\left(\mathcal{E}_x^2-\mathcal{E}_y^2-\mathcal{E}_z^2\right) & p_{xy} = \frac{1}{4\pi}\mathcal{E}_x\mathcal{E}_y & p_{xz} = \frac{1}{4\pi}\mathcal{E}_x\mathcal{E}_z \\ p_{yx} = \frac{1}{4\pi}\mathcal{E}_x\mathcal{E}_y & p_{yy} = \frac{1}{8\pi}\left(\mathcal{E}_y^2-\mathcal{E}_x^2-\mathcal{E}_z^2\right) & p_{yz} = \frac{1}{4\pi}\mathcal{E}_y\mathcal{E}_z \\ p_{zx} = \frac{1}{4\pi}\mathcal{E}_x\mathcal{E}_z & p_{zy} = \frac{1}{4\pi}\mathcal{E}_y\mathcal{E}_z & p_{zz} = \frac{1}{8\pi}\left(\mathcal{E}_z^2-\mathcal{E}_x^2-\mathcal{E}_y^2\right) \end{cases}$$

que definen las componentes de las tensiones, llegamos, transformando la integral de volumen a una de superficie, a

$$\vec{F}_x = \int_\Sigma \vec{p}_x \cdot d\vec{\sigma}$$

De este modo, aún sin analizar en qué consistan las tensiones del medio, se ha mostrado la consistencia de la teoría. "Este paso "me parece importante,ya que explica, por la acción de las partes "consecutivas del medio, fenómenos que antes se suponían explicables "solamente por la acción directa a distancia." (p.165)

El resto de la Electrostática contiene (hasta pág. 353) las fórmulas matemáticas auxiliares, cálculo de líneas de fuerza en diversos casos (con una colección de figuras que después se han reproducido en todos los textos hasta el presente), presentación detallada del método de las imágenes (Thomson, Phil.Mag.,1848). descripción y teoría de instrumentos de electrostática, etc.-

Concluiremos esta reseña con una observación: aunque Maxwell se ocupa en diversas partes del modelo de dieléctrico, y su comparación con un sólido elástico, nunca tráta de dar un modelo de vacío, a pesar de que es el más notable de los dieléctricos. Si lo hubiera hecho, se habría visto obligado a hablar de polarización del vacío, y,siguiendo el paralelo, rotura del vacío por un campo eléctrico suficientemente intenso, con separación de cargas.

Pero ni Maxwell ni ninguno de sus continuadores podían haber imaginado que las últimas consecuencias de la ecuación $\vec{\mathfrak{D}} = \varepsilon\vec{\mathfrak{E}}$ habían de encontrarse en 1931, cuando Millikan y Anderson hallaron la formación de pares de electrones positivo y negativo, al proveer un rayo cósmico la energía necesaria para que se materialicen las dos cargas que el campo intenso en la vecindad de un núcleo mantiene polarizadas. --

b) Electrocinemática (p.354)

"Si dos conductores A y B están cargados con electricidad de "modo que el potencial de A sea mayor que el de B, entonces, si se "ponen en comunicación por medio de un hilo metálico C que toque a "ambos, parte de la carga de A se transferirá a B, y los potenciales "de A y B se igualarán en muy corto tiempo.

"Durante este proceso ciertos fenómenos se observan en el "alambre C, que se llaman los fenómenos del conflicto eléctrico o "corriente".

Vemos que Maxwell trata de aliviar la impresión de movimiento de la electricidad que aflora en el título de esta sección, recurriendo al nombre de "conflicto" introducido por Ørsted medio siglo antes.

El resto de la sección - y del tomo - está dedicado a la electrólisis, cuya teoría es presentada con reticencia, ley de Ohm, efecto Joule, y medición y cálculo de resistencias é intensidades . Omitimos tales temas, no vinculados con nuestros objetivos.-

8. A Treatise, Tomo II

En las 500 páginas del segundo tomo, Maxwell trata del Magnetismo y del Electromagnetismo, formula las ecuaciones generales de éste, y las aplica a la teoría de la luz.

Después de enumerar rápidamente las propiedades elementales que definen a un imán é introducir la nomenclatura sin mayor precisión, (la definición de polo es :" Los extremos de un imán largo y delgado se llaman usualmente sus polos"(1), pág. 3), enunnia la ley de Coulomb, y la de que "en todo imán la cantidad total de magnetismo-considerado algebraicamente- es nula ".

"El producto de la longitud de una barra magnetizada a lo "largo de manera uniforme , por la intensidad de su polo positivo, se llama su Momento Magnético", y "La intensidad de magnetización, I , "de una partícula magnética es el cociente entre su momento y su volumen".(pág.9).

Comparando con los capítulos iniciales del primer tomo, se nota con qué cuidado se omite ahora la alusión a las propiedades del medio, que constituyeron el leit- motiv de la electrostática.-

Un cuerpo magnetizado produce en todos los puntos del espacio no ocupados por él una"fuerza magnética" que se deduce de un potencial (p.10)

$$V=\int_{S}\frac{1}{r}\vec{I}.d\vec{\sigma}-\int\frac{div\vec{I}}{r}dv$$

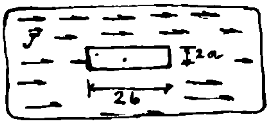
de modo que tenemos para la"fuerza magnética" el valor (p.22)

$$\vec{H}=-grad\,V$$

Para definir en cambio "mediante la experiencia la fuerza mag-"nética en un punto dentro del imán, debemos comenzar por quitar parte "de la sustancia magnética, de manera de formar una cavidad en la que "pondremos el polo magnético ". Maxwell propone tomar "una porción del "imán en que la dirección é intensidad de la magnetización sean uni-"formes, y cavar en él una cavidad en forma de cilindro, cuyo eje sea "paralelo a la magnetización"(p.23)

Las paredes de dicho cilindro no estarán magnetizadas; hay que analizar solamente la acción de sus bases, con densidad magnética su-

(1) (Justificado después en pág 34)



perficial I y menos I, respectivamente.

El efecto de estas bases sobre un polo situado en el centro del cilindro, resulta

$$F = 4\pi I\left(1-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

donde a es el radio y 2b la longitud del cilindro.

Ahora obtenemos: Haciendo tender a/b á cero que la única fuerza que existe en el interior (pues $\vec{H}_i = 0$), es $\vec{H} = -\text{grad } V$.

Haciendo tender b/a ~~xxxx~~ a cero, (cilindro chato), actúa $\vec{H}_i = 4\pi\vec{I}$, además de la anterior. "Definiremos a la fuerza en el interior de un disco hueco de bases normales a la magnetización, como la Inducción Magnética dentro del imán":

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{I}.$$

Puede probarse enseguida que div $\vec{B} = 0$ (p.28), y que en consecuencia es posible hallar un vector $\vec{A}$ (definido a menos de un vector de diveggencia hula), tal que (p.32) $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$.

A continuación se calculan potenciales de filamentos y láminas imanadas (p.32 a 46), y se estudian las propiedades del hierro, calculándose algunos campos. El tema concluye con el estudio del magnetismo terrestre, é instrumentos para mediciones magnéticas (hasta p.137).

El electromagnetismo comienza en pág.138, pero no nos detendremos en sus primeros capítulos, en donde se describen las experiencias primeras de Ørsted , Ampére y Faraday de manera elemental. La teoría dinámica de Maxwell, que le condujo a establecer sus ecuaciones generales comienza en verdad en pág. 195, al hablar de autoinducción.

La acción inductiva de una corriente sobre su propio circuito sugiere que "la electricidad circula por el alambre con algo como "impulso, o inercia" (Faraday, Exp.Res.,n° 1077), y Maxwell compara esos fenómenos con las de inercia del agua en una cañería . Desde luego que no son la misma cosa, pues "si esos fenómenos se deben a un impulso, "el impulso no es por cierto el de la electricidad en el alambre, pues "el mismo alambre, llevando la misma corriente, produce efectos que "varían según su forma; y aún cuando no varíe esta, es afectado el "resultado por la presencia de otros cuerpos, como hierro o circui- "tos cerrados".

"Sin embargo, es difícil para quien haya reconocido la analo- "gía entre los fenómenos de la auto-inducción y los del movimiento de "cuerpos materiales, abandonar por completo el auxilio de esta ana- "logía... La idea fundamental de que la materia es la portadora di- "námica de impulso y energía está tan entrelazada con nuestra forma "de razonar, que en cuanto entrevemos esa idea en cualquier parte de la naturaleza, sentimos que ante nosotros se abre un camino que nos ha "de conducir, tarde o temprano, a la comprensión completa del proble- ma (p.197).

..."Por lo tanto, parece que un sistema con corriente eléctrica es "el asiento de una energía de cierta clase; y como no podemos for- "marnos una concepción de la corriente eléctrica salvo como un fenó- "meno cinético, su energía debe ser cinética".

Recordemos que pocas líneas más arriba, Maxwell adujo razones para probar que la energía cinética no es imputable a la corriente misma tal y como circula por el conductor; de modo que "Nos vemos con- "ducidos a inquirir si no habrá otro movimiento en acción en el espa- "cio fuera del alambre, que no está ocupado por la corriente, pero en "el que se manifiestan sus efectos electromagnéticos" (p.198).

Es indudable que es débil la fuerza heurística de estos párra- fos, que son la única justificación que Maxwell provee en su Tratado para su formalismo. No solamente se demoraron décadas en aceptar las consecuencias matemáticas de su teoría, sino que una vez que fueron aceptadas se optó por tomar las ecuaciones como postulados fundamenta- les de toda la electrodinámica, pero sin pretender demostrarlas, ni por el camino de Maxwell ni por ningún otro.

Buena parte de esta demora débese - es nuestra opinión - a que Maxwell ha prevenido al lector durante setecientas páginas que no debe aceptar la engañosa intuición de que la corriente "corre", ni de que algo "fluye", ni de que la electrólisis suponga transporte de moléculás de electricidad, a pesar de que las ecuaciones, las experiencias, y el mismo lenguaje lo están sugiriendo, y luego, cuando el lector está habituado a no confiar ya en sus primeras imágenes mentales, halla de pronto que toda la teoría matemática está edificada sobre la idea de que algo, a pesar de todo, se mueve. Y lo que es más, ese algo es imponderable, invisible, fuera por definición de toda experimentación, y tan importante para el autor que es la única "materia" que distingue.--

Todo el problema se concentra ahora en estudiar la "energía cinética" que debe asociarse a una corriente eléctrica, y aplicarle las ecuaciones ordinarias de la mecánica general, es decir, las ecuaciones de Lagrange (que Maxwell resume en p. 199 a 210).

La energía cinética en un sistema de conductores puede provenir de tres causas (p.214) a) la energía puramente mecánica, debida al movimiento del material que forma los conductores, y cuyo estudio compete a la mecánica y no a la electrodinámica. b) la energía cinética imputable puramente a la corriente como tal, que debiera provocar corrientes cuando el metal es movido bruscamente, y que Maxwell dá por no existente porque "ningún fenómeno de esta clase ha sido observado hasta ahora "(p.217) (recordemos que el efecto Barnett, que es justamente lo que Maxwell buscó experimentalmente sin hallarlo, fué observado en 1914). En tercer lugar, c) energía cinética que depende de las intensidades de corriente y no de movimientos del metal.

En definitiva, Maxwell atribuye los fenómenos electromagnéticos a la existencia de una "energía cinética" que no proviene en modo alguno de velocidades de los alambres ni de la electricidad dentro de ellos, pero que sí depende de la existencia de una corriente eléctrica. Esta energía cinética la escribe en función de dos tipos de coordenadas de Lagrange: las variables espaciales, x_i, que describen la geometría de los circuitos, y las variables y_j, que "denotan la cantidad de electricidad que ha cruzado una dada "sección del conductor desde el origen del tiempo t . La intensidad "de la corriente se indicará con $\dot{y}$, la fluxión de esta cantidad" (p. 223) .

De este modo puede escribirse la energía cinética como

$$T = \frac{1}{2} M_{ij} \dot{y}_i \dot{y}_j$$

forma cuadrática en las variables y_j (intensidades en los circuitos), poniéndole coeficientes de inercia M_{ij} que dependen de las variables de configuración x_i, y <u>solamente de ellas</u>. Que los coeficientes de inercia no contienen a las variables y_j ni $\dot{x}_i$, es un postulado aceptado por Maxwell en virtud de la experiencia.

De inmediato tenemos

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_j} = M_{ji} \dot{y}_i$$

como expresión del "impulso" electrocinético asociado al circuito por el que circula $\dot{y}_j$.

Como ejemplo del modo de razonar, calculemos la "fuerza electro-motriz proveniente de la magneto-inducción " en un circuito solo. Aplicamos una f.e.m. exterior al circuito ,E , y tenemos, según la ecuación de Lagrange,

$$F = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y}$$

o, ya que T no depende de y ,

$$F = E = \frac{d}{dt} p$$

es decir, en el circuito se ha originado a su vez una "fuerza electromotriz proveniente de la magneto-inducción solamente, que es evidentemente $-\frac{dp}{dt}$,o sea, el régimen de variación del impulso electrocinético del circuito " (p.225)

Si en lugar de aplicar una tensión eléctrica hubiésemos aplicado una fuerza mecánica F que modificara x - moviendo un trozo del circuito, por ejemplo - tendríamos

$$F = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x}$$

y como T no contiene $\dot{x}$,

$$F = -\frac{\partial T}{\partial x}$$

El circuito habrá obrado con una reacción igual y contraria, que Maxwell llama "fuerza eledtromagnética", y tenemos así que "la fuerza electromagnética que tiende a aumentar una variable cualquiera, es " igual al régimen de aumento de la energía electrocinética por unidad "de aumento de dicha variable, si las intensidades de corriente se han "mantenido constantes" (p.225)

Como el impulso p es la magnitud decisiva en circuitos en que varíe la intensidad, Maxwell dedica especial cuidado a mostrar que p puede expresarse como una integral extendida sobre el circuito,

$$p = -\frac{1}{c}\oint \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

(en notación actual), y también que este vector $\vec{A}$ así introducido de manera formal, puede ser interpretado como el potencial vector del circuito, de modo de tener rot $\vec{A} = \vec{B}$.

Si derivamos respecto al tiempo la expresión integral, y suponemos que el circuito es deformado, tenemos (derivando la función integral con dominio de integración variable) y operando)

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}} - \nabla\varphi$$

El último término ha debido añadirse "para dar generalidad a la expresión. Desaparece una vez que integramos sobre todo elcircuito cerrado. ...Hallaremos, sin embargo, que cuando conozcamos todas las circuns-"tancias delproblema podremos asignar un valor definido a φ , y que, "según una cierta definición, representa el potencial eléctrico "en el punto considerado"(p.239).

Queda todavía una ecuación por establecer, y es la que vincula corrientes con su camposmagnéticos. Por comparación con las propiedades de las hojas magnéticas, se deduce de inmediato (p. 250) que la ecuación debe ser

$$\text{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{\imath}$$

donde $\vec{\imath}$ sea la densidad de corriente .

Ahora bien; "Una de las peculiaridades principales de este "tratado es la doctrina que afirma de que la verdadera corriente eléc-"trica , de la cual dependen los fenómenos, no es la misma cosa que la "corriente de conducción, sino que para estimar el movimiento total de "la electricidad debe tomarse en cuenta la variación temporal de $\vec{D}$, "el desplazamiento eléctrico, de modo que debemos escribir (p.253)

$$\operatorname{rot} \vec{\mathcal{H}} = \frac{4\pi}{c}\vec{i} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} .$$

Finalmente, es fácil verificar que el potencial $\vec{A}$ satisface las ecuaciónes (p.256)

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \qquad ; \quad -\Delta \vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{i} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} .$$

Tal fué la presentación y justificación que de sus hoy famosas ecuaciones hiciera Maxwell.—

Dejamos sin trascribir la deducción de la energía "electrocinética" total del circuito, por ser análoga a la ya detallada deducción de la energía electrostática. Se llega, como es sabido a que

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{8\pi}\int_V \vec{\mathcal{B}}.\vec{\mathcal{H}}\, dv$$

pero no es energía de deformación elástica, sino que "esta energía existe en la forma de cierta clase de movimiento de la materia en toda porción del espacio" (p.274)

Una última consideración completa este estudio: la incorporación de los imanes permanentes a la teoría general, suponiéndolos, como ya sugirió Ampere, formados por corrientes circulares permanentes.

En este caso, la energia magnética de los imanes (energía repartida en el espacio que los rodea) pasa a ser energía electrocinética de sus corrientes enlugar de ser energía potencial. La diferencia fundamental es la siguiente:

"En nuestro estudio de los imanes... supusimos que la energía "de un sistema magnético es potencial, y que esta energía <u>disminuye</u> "cuando el sistema se deforma por acción de sus propias fuerzas magné- "ticas.

"En cambio,si consideramos que las propiedades de los imanes "provienen de las corrientes eléctricas que circulan en sus moléculas, "su energía es cinética, y la fuerza que se ejercen es tal que tiende "a moverlos de manera tal que si las intensidades de las corrientes "se mantuvieran constantes, la energía cinética aumentaría" (p.275).

..."Si suponemos que nuestro formalismo matemático es capaz de

"investigar lo que sucede en el interior de las moléculas, debe-
"mos renunciar a la antigua teoría del magnetismo, y adoptar la
"de Ampère, que no admite otros imanes que los que consisten en
"corrientes eléctricas."

"También debemos considerar tanto la energía magnética como
"la electromagnética como energía cinética, y atribuirle el sig-
"no correcto". (p.276)

Hénos, finalmente, en posesión del formalismo completo. Después de varios capítulos dedidados a unidades, aplicaciones, instrumentos, llegamos en la pág. 431 al resultado cumbre del tratado : Cap. XX, "Electromagnetic theory of light":

Maxwell recuerda que el medio que llena el espacio según "la "tentativa hecha en diversas partes de este tratado de explicar "los fenómenos electromagnéticos", tiene propiedades similares al que supone la teoría ondulatoria de la luz. De inmediato muestra que sus ecuaciones conducen (permítasenos omitir una deducción elemental y que hoy pertenece no ya a la electrodinámica sino a la Física General) a ecuaciones del tipo

$$\Delta \vec{A} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

"La velocidad de propagación de las perturbaciones electromag-
"néticas en un medio no conductor es, según la anterior ecuación,
"igual a (p.435) $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

Que la velocidad de la luz en el vacío concuerda con esta predicción, lo pudo corroborar el mismo Maxwell; disponía de tres valores de la velocidad de la luz (Fizeau, Bradley, Foucault) y tres de la constante c (Weber, Maxwell, Thomson). Pero "el único "medio dieléctrico cuya capacidad haya sido determinada hasta aho-"ra con precisión suficiente, es la parafina"(p.437), y la comparación de valores dió una discrepancia mayor que lo deseable, "mostran-"do que nuestras teorías de la estructura de los cuerpos deben ser "mejoradas antes de que podamos deducir sus propiedades ópticas a "partir de sus propiedades eléctricas"(p.437)

Es precisamente en esta consecuencia de la teoría donde se cebó más la crítica. Cuando uno recuerda el valor del índice de refracción del agua (1,3 para la luz visible) y el de su constante dieléctrica (81), comprende bien cuánto falta aún para que podamos cumplir la propuesta de Maxwell "de mejorar nuestras teorías de la estructura de los cuerpos" para dar razón de dicha discrepancia.

Otra consecuencia de la teoría que había de originar discusiones, es la existencia "de una presión...en la dirección de propagación de la onda;... "numéricamente igual a la energía en la unidad de volumen"(p.441). Su compatriota William Crookes (1832-1919) ideó el "radiómetro" para poner de manifiesto esta presión de la luz, pero el aparato dió resultado erróneo; la primera experiencia confirmatoria fué lograda por Piotr Nicolaevich Lebedev (1866-1912) a fines del siglo.

El famoso Treatise concluye con un capítulo sobre el efecto Faraday de rotación del plano de polarización de la luz por efecto de un campo magnético, y otro sobre ferro- y diamagnetismo. Nuestro trabajo no cubre aún - infortunadamente - estos temas, y por ello los dejamos sin mencionar en detalle.

El capítulo final (p.480 a 493) es de crítica a las "Teorías de acción a distancia". No interesa resumir la exposición histórica, que hemos tratado en cada caso en su debido lugar. Pero queremos destacar la opinión de Maxwell sobre los potenciales retardados (introducidos por Riemann) : "Si hay algo que se propaga de una par-"tícula a otra a la distancia; ¿en qué condición se encuentra ese al-"go después de haber dejado una partícula y antes de llegar a la otra? ...De hecho, cuando se transmite energía de un cuerpo a otro, ha de haber un medio o sustancia en que la energía existe entretanto... "En consecuencia, todas estas teorías conducen a la concepción de un "medio en que la propagación tenga lugar, y si admitimos este medio " como una hipótesis, creo que debería ocupar un puesto destacado en "nuestras investigaciones, y que debiéramos tratar de construir una "representación mental de todos los detalles de su acción; ésta ha "sido nuestra permanente mira en este tratado"(párrafo final)

En otras palabras, no halla objeción alguna a las teorías de que algo se propague y ese algo se llame potencial.

En todo este resumen de la obra capital de James Clerk Maxwell , hemos reducido al mínimo nuestra intervención personal, para que el lector participara directamente del clima del libro mas extraordinario del siglo pasado; por ello pudimos transcribir casi sin podas toda la fundamentación de su formalismo. El material no reseñado es , o de carácter descriptivo , o puramente formal. No pretendemos que el lector juzgue a Maxwell por nuestra reseña, ni tratamos de evitarle el placer de su lectura directa; respetuosamente, hemos querido tan solo que conozca, en las propias palabras del Tratado, el tipo de razonamiento sutil que lo espera en sus páginas.-

No nos atrevemos a señalar al que lea la presente Tesis, los puntos de nuestro trabajo que concuerdan con el de Maxwell; en lugar de tal petulante tarea, preferimos decir que no hay - en cuanto llevamos hasta la fecha realizado - nada que esté en contradicción con sus ecuaciones. Pero no es ello, por cierto , mérito nuestro, sino prudencia. En efecto, si alguna de las consecuencias de nuestro formalismo hubiese estado a nuestro entender en contra de las ecuaciones de Maxwell, ello hubiera señalado el abandono de la tarea comenzada.-

9. Los potenciales retardados

Después de habernos ocupado de las consecuencias de los trabajos é ideas de Weber en manos de Maxwell, consideraremos ahora la otra línea de investigación que partió de esos mismos trabajos é ideas, simultáneamente. En 1858, Bernhard Riemann (1826-1866) presentó un trabajo que después retiró y fué publicado en 1867 (Pogg.Ann., 131,,237). En ese artículo proponía para el potencial de una partícula cargada la ecuación

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi = 4\pi\rho$$

similar a la ecuación de Poisson, a la que se reduce si la partícula se halla en reposo.

Al referirse a esta ecuación, Maxwell escribe "la de-"mostración matemática dada por Riemann fué examinada por Clausius "(Pogg.,135,612), quien no admite su solidez, y muestra que la hipó-"tesis de que el potencial es propagado como luz no conduce ni a la "fórmula de Weber, ni a las leyes conocidas de la electrodinámica" (Treatise, II,490).

Parece que la solución hallada por Riemann para el caso de una carga puntual móvil, fué $\frac{e}{r(t,t')}$

(citamos a Reiff y Sommerfeld,1902)

donde t es el instante en que queremos calcular el potencial en un cierto punto, y t' un instante previo en el que se encontraba la carga móvil a distancia r del punto potenciado. La relación entre esos tiempos es que $t - t' = r/c$, o sea, su diferencia es el lapso que el potencial tardó en llegar.

Desde luego que esa solución no conduce a la electrodinámica conocida;(1) el método de Kirchhoff para hallarla es de 1882, (Berl.Sitzungsber.,p.641) y la solución explícita apareció en 1898 (A.Liénard, L'éclairage électrique,pp. 5,55,106, 16), y conduce, en efecto , a la electrodinámica habitual, en unión de la cinemática relativista.

El objeto de la presente Tesis es precisamente probarlo. Ver

(1) pero en ese mismo año apareció el trabajo de Lorenz con la solución formal correcta,

Además de la ecuación anterior, Riemann propuso, independientemente de ella, una ley de fuerzas entre cargas puntuales, a la manera de Weber, y que se reduce en definitiva a la misma ley de Weber (ver pág. 37). Riemann no publicó su ley como trabajo, sino que la usó en sus lecciones universitarias (Schwere, Elektrizität u. Magnetismus, Hannover 1876, 318, 399).

Mencionemos aquí a L. Lorenz (1829-1891), que a consecuencia de las ideas de Riemann sugirió una teoría electromagnética de la luz (Pogg. Ann., 131, 243, 1867), en la que admite que ésta consiste en corrientes eléctricas que se propagan por el vacío y medios no conductores, provocadas por un potencial eléctrico retardado, como el de Riemann, pero de expresión

$$\varphi(\vec{r},t) = \int \frac{dv}{r}\, \rho(\vec{r}, t - \frac{r}{c})$$

es decir, con la forma con que lo usamos actualmente.

Lorenz no consiguió calcular el índice de refracción de una sustancia y ésta fué precisamente la piedra de toque de la teoría de Maxwell, que sí lo calculaba. De todas maneras, a fin de poder cotejar una vez más las llamadas teorías de "acción a distancia" como la de Lorenz, con las de "acción por contigüidad", transcribimos el comentario que el propio Maxwell hizo del trabajo de Lorenz

" Lorenz dedujo...un nuevo conjunto de ecuaciones, que indican "que pueden propagarse ondas formadas por corrientes eléctricas "transversales, con una velocidad comparable a la de la luz...

"Estas conclusiones son similares a las de este capítulo, aun- "que fueron obtenidas por método enteramente distinto. La teoría de "este capítulo se publicó primero en Phil. Trans., p.459, 1865".

En otras palabras, el propio Maxwell dice que sus rivales llegan prácticamente al mismo sitio, y se limita a avisar que él ha llegado antes.

Por cierto que estos potenciales "retardados", que invierten un tiempo finito en propagarse de un punto a otro, no parecen a primera vista, encuadrar dentro de lo que implícitamente llamamos "acción a distancia"; en efecto, esta frase suele usarse en el sentido de acción simultánea é independiente del medio.

Conviene recordar que - como ya lo destacamos anteriormente - no tiene mucho significado hablar de "simultaneidad" entre dos puntos distantes en fechas anteriores a la relatividad de 1905; fué entonces cuando por primera vez se planteó claramente la pregunta.

Pero es que ni siquiera la mecánica de Newton ha implicado nunca esa simultaneidad. Véase el párrafo siguiente:

" No es inverosímil que la virtud atractiva ,o mas en general "ninguna de las fuerzas que se ejercen a distancia, sea comuni- "cada en un instante de un cuerpo al otro, ya que todo lo que "se transmite a través del espacio nos parece que debe responder "sucesivamente a sus diferentes puntos; pero la ignorancia en "que nos hallamos sobre la naturaleza de las fuerzas y la manera "de transmitirse nos hace muy reservados en nuestros juicios,has- "ta que la experiencia venga a iluminarnos".

Esto no fué escrito por un partidario de Maxwell, ni por una persona que conociera electrodinámica. Es de Laplace, y fué escrito en 1776, cuando no se conocían más leyes que las de Newton y de Coulomb, prototipo ambas de "acciones a distancia".

Sigue el Marqués de Laplace:

"Sin embargo, haré notar que aún cuando parezca haber una co- "municación instantánea, no hay que apresurarse a concluir que "la hay en realidad, ya que es infinitamente diferente una de- "mora en la propagación inapreciable, y una demora absolutamen- "te nula."

Pero aún más decisiva es el trozo siguiente:

... "Ahora,... como los planetas y sus satélites están poco "más o menos en ese caso (se refiere a afirmaciones aquí omitidas por no ser del tema)"se vé que la gravitación podría emplear un tiempo mucho mas grande que la luz en propagarse del

"Sol a la Tierra, sin que ello pudiera notarse. El Sr. Daniel Ber-
"noulli parece sospechar una tal propagación sucesiva, en su exce-
"lente trabajo sobre flujo y reflujo del mar. Según este ilustre
"geómetra, la acción de la luna puede emplear uno o dos días en lle-
"gar a la Tierra. Tal lentitud no es plausible ; produciría desigual-
"dades apreciables en el movimiento lunar..." (Laplace, Oeuvres,
8, 212, editado en 1891; escrito en 1776).

En cuanto a la influencia del medio en la teoria de las acciones a distancia, ya conocemos la opinión de Newton (pág. 9) y de Euler (pág. 30) entre otros.

Hemos mencionado en muchas oportunidades las razones por las que la "acción a distancia" nunca ha sido - por lo menos en la opinión de quienes trabajaron sobre ella - esa concepción absurda y "repugnante al espíritu" que solemos figurarnos. Por el contrario, conduce directamente a los potenciales retardados que son comunes a ese punto de vista y al de Maxwell .

Podríamos también mencionar que, a la inversa, el estudio topográfico del "medio" o del "éter", en la forma iniciada por Maxwell, tampoco es tan fundamental como su genial creador supuso, y debemos acostumbrarnos a emplear una teoría de Maxwell en que se halla ausente la construcción mas preciada de su autor. El abandono de los modelos de éter, que el mismo Maxwell comenzó, fué continuado por sus seguidores (Lorentz, Hertz), y condujo al olvido del concepto mismo, al apareder la relatividad.-

En todos los potenciales anteriores, se supone más o menos embozadamente que la acción que se propaga es una especie de perturbación elástica, aunque, como con justicia apunta Maxwell, "parece evitarse hacer mención explícita de medio alguno en que la "propagación haya de tener lugar"(Treat.,II,p.490).

Un tipo completamente distinto de potencial fué introducido por Carl Neumann (1832-1925) en Math. Ann.,1,317,1869, suponiendo que una carga móvil envía una orden ("Befehl") a una segunda carga, pasiva; esta orden se propaga con una gran velocidad - que nó es la de la luz , sin embargo - y viaja directamente sobre la recta de unión de ambas cargas, como un proyectil. Aunque la orden impartida es función del instante y posición en que fué emitida, a su arribo tendremos otro instante y otra configuración del sistema de las dos cargas. Después de calcular su potencial en función del tiempo y posición de llegada, é imponerle la condición de cumplir el principio de conservación de energía, C. Neumann obtiene

$$V = \frac{q}{r}\left[1 + \frac{1}{2c^2}\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{r}\right)^2\right]$$

Reconocemos en la forma de hablar de Neumann un germen del modelo de los fotones, que había de aparecer mucho mas tarde. La forma del potencial - como la de casi todos los anteriores - es similar al potencial relativista, pero difiere de él en detalles; no olvidemos que fueron escritos cuando no existía el conocimiento de los electrones, ni de la cinemática de Einstein. Eso explica porqué el trabajo de C.Neumann mereció de Maxwell la siguiente crítica: " ...la velocidad de transmisión del potencial no es, [para Neumann] como "la de la luz, constante respecto al éter o al espacio, sino mas "bien como la de un proyectil, constante respecto a la velocidad "de la partícula en el instante de la emisión"

La respuesta a esa observación de Maxwell es que ambas velocidades pueden ser simultáneamente constantes si empleamos la cinemática correcta, y no hay por lo tanto contradicción. Pero él concluyó ..." No he sido capaz de construir una representación men-

"tal de la teoría de Neumann" (Treat.,II,p491).-

A consecuencia de la controversia sobre la ley de Weber (que ya referimos en pág. 37), Rudolf Emmanuel J. Clausius (1822-1888) propuso suponer que la electricidad se desplaza en los conductores con velocidades distintas, según su signo; eventualmente, una electricidad (la negativa) se mantendría en reposo mientras la "corriente" era formada por la otra exclusivamente.

<u>Las acciones entre dos conductores deben entonces poder calcularse a partir de una expresión de fuerzas entre cargas móviles y fijas, sumando para cada conductor las cuatro acciones que el otro ejerce sobre él</u> . Es <u>exactamente</u> el punto de vista adoptado por nosotros (pág. 131)

Como expresión de la energía potencial, Clausius adoptó

$$V = \frac{q_1 q_2}{r}(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)$$

donde $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ son las velocidades de las cargas q_1 y q_2.

Obsérvese que poniendo $q = i\, ds$, donde <u>ds</u> es un elemento del conductor, hallamos que el potencial de Clausius no es más que un elemento del potencial integral de F.Neumann (v. pág.   ). Esto garantiza la consistencia de su hipótesis. (Pogg. Ann., <u>156</u>,p.657, 1875).

Para hallar la ley de fuerzas entre cargas, debe sumarse a este potencial ,"electrodinámico", el potencial de Coulomb $q_1 q_2/r$; y entonces aplicar, como ya lo hicieran también C.Neumann y Riemann, el principio variacional de la mecánica de Lagrange y Hamilton:

$$\delta \int (T - U)\, dt = 0$$

que conduce a las ecuaciones de Lagrange, en este caso en la forma (1)

$$-F_x = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial U}{\partial x}$$

para la expresión de las fuerzas. Se obtiene de este modo:

$$F_x = \ldots + \frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right) - \frac{q_1 q_2}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}_2}{r}\right)$$

Si ahora tomamos dos conductores neutros, en el sentido de que en ambos las cargas positivas igualan a las negativas, y hacemos que circule por ellos corriente, la que imaginamos debida al

(1) Los detalles que aquí omitimos, pueden verse en Enz. d. Math. Wiss., V2, p. 58.

desplazamiento de cargas de un solo signo (Clausius supuso movimiento de las cargas positivas), llegamos exactamente a la ley

$$\vec{F}_1 = \frac{i_1 i_2}{c^2}\, d\vec{s} \times \left(d\vec{s} \times \frac{\vec{r}}{r^3}\right)$$

es decir, a la ley de Grassmann.

De esta manera, nuestro presente trabajo no es sino la aplicación de las ideas de Clausius con los conocimientos actuales de que él no disponía. Hemos empleado su mismo razonamiento y llegado al mismo resultado, esencialmente; nuestra forma de calcular resulta así tomada de una línea de razonamiento que partió de Gauss y en manos de Weber y F. Neumann, C. Neumann y Clausius fué completamente desarrollada, sin que le faltase mas que la transcripción relativista.

(Con un poco de pesar declaro aquí que fué con gran sorpresa que hallé esa línea histórica, <u>después</u> de haber obtenido mis primeros resultados independientemente. Mucho tiempo, y sobre todo, mucha incertidumbre, pudieron haber sido economizados, de haber conocido antes esos trabajos).-

Destaquemos, de paso, que todos los autores reseñados en este capítulo han obtenido la fuerza actuante sobre las cargas a partir de las ecuaciones de Lagrange; es decir, por el mismo camino que Maxwell empleó llevado por su modelo mecánico del éter. Los puntos de vista que se resumen en las locuciones "acción a distancia" y "acción por contigüidad" no difieren ya ni en sus consecuencias, ni en sus afirmaciones esenciales, ni en los métodos de deducción de sus fórmulas .

En cuanto se le quita el éter a la teoría de Maxwell, para dar paso a la cinemática de Einstein, desaparece el último rasgo que caracterizaba la antinomia.

Hacia 1890 se empezó a reconocer con claridad la existencia de los electrones, y con ella renació el interés por las leyes entre cargas elementales en reposo o movimiento. Un poco antes del descubrimiento de la cinemática relativista, en 1902, Reiff y Sommerfeld (Enz. d. Math. Wiss., V,2, p.62; edición 1922) se ocupaban de decidir, a la luz de la existencia de los electrones, cuál era, entre las ideas y postulados de Riemann, Weber, Clausius, etc., el que correspondía a la realidad.(1) Después de idear experiencias (que nunca fueron realizadas) para decidir entre todo ello, concluyen su trabajo con este párrafo:

"Desde el punto de vista de la actual teoría electrónica, debería preferirse entre las leyes electrodinámicas la de Grassmann, y entre las leyes fundamentales la de Clausius, una vez que ambas hubieran sido completadas con el esquema realizable sobre la propagación de las acciones eléctricas en el tiempo que Gauss postulara y Maxwell realizó". (o.c.,p.62)

Si tres años después de haberse escrito ese párrafo Einstein hubiese optado por ese camino, para el cual disponía ya de todas las herramientas, hubiera tenido solamente que mostrar que la teoría era independiente de la "construirbare Vorstellung" de que hablan Reiff y Sommerfeld, y los resultados del presente trabajo figurarían ya en su primera memoria. Pero no se halla, sin embargo, en la "Elektrodynamischer Teil" de su trabajo de 1905, rastro alguno de este punto de vista. Veremos en ~~este~~ el capítulo inmediato la razón histórica de ello.-

(1) El análisis original se debió a E. Budde, Wiedemann Ann. d. Ph., 30, 100; 1887

10. Desarrollo posterior de la teoría de Maxwell.

La preeminencia actual del formalismo electrodinámico de Maxwell, no fué alcanzada con rapidez. El Tratado mismo creó mas críticos que discípulos, en Inglaterra y el continente: el mismo Thomson, en cuyas primeras ideas se inspirara Maxwell para el modelo de éter, tardó mucho en aceptarla, hasta el punto que aún en 1904 , en una conferencia en Baltimore, declaró: "The so-called electromagnetic theory of light has not helped us hitherto".

Esta frase de Lord Kelvin no parece muy justiciera, recordando que desde 1886 se disponía de ondas electromagnéticas, que la teoría de la luz había precisamente ayudado a encontrar.

Los trabajos de desarrollo sobre la teoría de Maxwell, comenzaron hacia 1884; en ese año apareció en Inglaterra el teorema de J.H. Poynting (1852-1914), según el cual la aplicación del principio de conservación de energía al sistema de ecuaciones de Maxwell exige que se asocie a los vectores $\vec{E}$ y $\vec{H}$ el vector $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}$, que mide la energía que por cm^2 y por segundo fluye del sistema.

La demostración de tal teorema, y del teorema paralelo sobre la conservación de la cantidad de movimiento , forman hoy parte de todo curso elemental, y por ello los omitimos aquí.(Phil.Trans.,p. 343, 1884)

Ese mismo año apareció en Annalen der Physik (23,p.84) un trabajo de Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894), quien había de ser el que introdujera las ideas de Maxwell definitivamente en el continente, después de los trabajos preparatorios de Hermann von Helmholtz (1821-1894) sobre la energía, y sobre las leyes ópticas de Fresnel deducidas mediante un vector magnético (Borch.Journ.,72,p.68,1870), que ya habían también ocupado al joven doctorante Hendrik Anton Lorentz (1853-1928) en su tesis de 1875 (Zs.f.Math.u.Ph.,22,p.1,1877).

Vamos a detenernos un poco en el trabajo de Hertz de 1884, para comprender su importancia.

El título del trabajo es " Sobre las relaciones entre las ecuaciones fundamentales de la electrodinámica de Maxwell, y las de la electrodinámica opuesta", llamando "opuesta" (gegnerischen Electrodynamik) a la que emplea el concepto de potencial, que Hertz toma como opuesto al de acción inmediata.

Si hubiese que elegir entre ambas electrodinámicas, concluye Hertz, elegiría la de Maxwell, mas simple, y que provee los mismos resultados que la otra sin necesidad de "términos correctivos". En efecto, Hertz demuestra que basta completar la electrodinámica usual (Neumann,Weber) para obtener las ecuaciones de Maxwell:

Según las experiencias de Ampére resulta que "no hay sino una clase de fuerzas magnéticas" , provengan de corrientes o de imanes. Análogamente, hay una sola clase de fuerzas eléctricas, ya provengan de acciones de inducción, o de fuentes electrostáticas: este principio de unicidad, "que se halla siempre implícito, independiente de toda teoría", conduce a que si un imán sufre una variación en su polarización magnética, mientras dura la variación deben originarse fuerzas eléctricas, y que en general, deben ser posibles todos los fenómenos que pueden enunciarse permutando las palabras "electricidad" y "magnetismo" en el enunciado de un fenómeno real.

Sin embargo , "en la electrodinámica habitual (Neumann) falta esta acción. Para describirla de manera sencilla, introduciremos un nuevo nombre, considerando la variación de una polarización magnética como una corriente magnética..."

"Las corrientes magnéticas actúan entre sí con las mismas leyes que las eléctricas..."

En resumen, Hertz admite al lado del potencial vector $\vec{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{i}}{r} d\tau$ otro potencial vector, $\vec{\Lambda} = \frac{1}{c}\int \frac{\dot{\vec{J}}}{r} d\tau$ formado por la variación temporal de J, la magnetización, y con propiedades duales a las del $\vec{A}$.

$\operatorname{div} \vec{i} = 0$	$\operatorname{div} \dot{\vec{J}} = 0$
$\vec{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{i}}{r} d\tau$	$\vec{\Lambda} = \frac{1}{c}\int \frac{\dot{\vec{J}}}{r} d\tau$
$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}$	$\vec{E} = \operatorname{rot} \vec{\Lambda}$
$\operatorname{div} \vec{A} = 0$	$\operatorname{div} \vec{\Lambda} = 0$

Pero a partir de $\vec{A}$, "se puede concluir según el principio de "conservación de la energía (Erhaltung der Kraft , escribe Hertz "siguiendo a Helmholtz), y se ha concluído, que cuando varía Υ "aparecen fuerzas eléctricas". "Las mismas consideraciones que nos " hacen deducir fuerzas inducidas eléctricas a partir del potencial " de las corrientes eléctricas ($\vec{A}$), nos permiten deducir, del po- " tencial de las corrientes magnéticas ($\vec{\Lambda}$), fuerzas magnéticas " inducidas." Es decir, que tenemos también dualmente:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{H} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{\Lambda}}{\partial t}$$

Es ahora cuando, aplicando su principio de unidad de las acciones eléctrica y magnética, Hertz iguala el vector $\vec{E}$ en ambos razonamientos, y análogamente el $\vec{H}$. Esto da, (operando)

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \,\mathrm{rot}\,\vec{A}}{\partial t} = \Delta \vec{\Lambda}$$

ecuaciones cuya solución Hertz adopta en la forma

$$\vec{\Lambda} = \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{rot}\int \frac{\vec{A}}{r}\,d\tau$$

Ahora bien , la derivada de $\vec{\Lambda}$ respecto al tiempo significa una fuerza magnética también, que deberemos añadir a la primitiva como "corrección". Este nuevo valor de $\vec{H}$ corregido, dará origen por su parte a nueva corrección en $\vec{E}$, que a su vez volverá a repercutir sobre el valor de $\vec{H}$ - a través de las ecuaciones anteriores - de modo que en definitiva el valor de $\vec{H}$ real resulta expresado por una serie de términos, correcciones sucesivas.

Hertz admite que esta serie es convergente y representa el valor verdadero. El potencial $\vec{A}$ que produce ese campo vale

$$\vec{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{i}}{r}\,d\tau - \frac{1}{c^3}\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \frac{\vec{A}}{r}\,d\tau + \frac{1}{c^6}\frac{1}{16\pi^2}\frac{\partial^4}{\partial t^4}\int\left(\int \frac{\vec{A}}{r}\,d\tau\right)d\tau - \dots$$

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$$

como es fácil de justificar formalmente.

Obtenida esta serie, calculemos sobre ella , miembro a miembro, las operaciones siguientes:

$$+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=\frac{1}{c^3}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\frac{\vec{i}}{r}\,d\tau-\dots$$

$$\Delta\vec{A}=-\frac{4\pi}{c}\vec{i}+\frac{1}{c^3}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\frac{\vec{i}}{r}\,d\tau-\dots$$

y por fin, igualando miembros izquierdos

$$\Delta\vec{A}=-\frac{4\pi\vec{i}}{c}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

Con lo que el potencial $\vec{A}$ cumple, señala Hertz, la misma ley de propagación que habían admitido Riemann y Lorenz .

Si suponemos ahora que los vectores $\vec{E}$ y $\vec{H}$ están ya calculados mediante las correspondientes series, sus valores seguirán obedeciendo a las ecuaciones de las páginas anteriores, y es inmediato poder probar que (usando la ecuación diferencial de A) se llega a

$$\mathrm{rot}\,\vec{\mathcal{E}}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\mathcal{H}}}{\partial t}\qquad\qquad \mathrm{rot}\,\vec{\mathcal{H}}=\frac{4\pi}{c}\vec{i}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\mathcal{E}}}{\partial t},$$

"que no es otra cosa que el sistema dado por Maxwell".

"Maxwell llegó a él considerando el éter como un dieléctrico, "cuyas variaciones de polarización ejercieran las mismas acciones que "las corrientes. A lo mismo hemos llegado nosotros, sobre la base de " postulados admitidos en general por los opositores a toda la concep-"ción Faraday-Maxwelliana."

... "En la teoría de Maxwell las ecuaciones no se refieren solamen-" te al vacío, sino también a cualquier otro dieléctrico. Partiendo "de nuestras premisas, podemos también deducir la validez de estas " leyes en todo medio homogéneo... " Pero ..."la constante c tomará " en cada caso un valor distinto", pues será siempre la velocidad de " propagación de la luz en dicho medio.-

Herz concluye su trabajo tomando partido por la forma maxwelliana de las ecuaciones, no porque las ideas de Riemann, Weber, etc., fuesen erróneas, sino porque constituye la manera mas concisa de expresar lo mismo, aunque "desde nuestro punto de vista, "sin dar su fundamento".-

Después de publicar el trabajo anterior, Hertz se ocupó experimentalmente de buscar la confirmación de una de las más audaces consecuencias electrodinámicas : la obtención de ondas electromagnéticas, cuya existencia se deducía tanto del formalismo de Maxwell como de la "übliche Electrodynamik", la electrodinámica usual de F.Neumann.

La posibilidad fué enunciada explícitamente por primera vez por Fitzgerald (Trans.Dublin, 3,1863), y Feddersen había ya obversado la descarga oscilante de un condensador (Pogg.Ann.,103, 69,1858, y varios trabajos hasta 116,132,1862).

Hertz empleó chispas provenientes de una bobina de inducción, observando que simultáneamente con ellas se producían otras en un marco de alambre que tenía dos terminales en forma de explosor. (Wied.Ann.d. Ph.,31,421,1887).

Aunque Hertz mismo tomó su resultado como confirmación de la existencia de una irradiación de energía, distinta de los fenómenos hasta ese momento estudiados, aunque consecuencia de ellos, es fácil comprender que no hay sino diferencia de grado entre la propagación de una energía a pocos centímetros de distancia, como en el transformador ideado por Faraday, y la propagación a miles de kilómetros, como en la actual radioelectricidad. Sabemos hoy que la energía transferida de un circuito a otro se hace máxima si ambos circuitos están sintonizados a la frecuencia emitida, y este principio es común a un transformador (p.ej. los denominados de "frecuencia intermedia" en radio) y a un sistema de antena emisora y receptora.

Mientras Hertz se ocupaba de estudiar las ondas electromagnéticas, apareció la duplex theory de Olivar Heaviside (1850-1925), en Phil. Mag.,1886 y 1887, conteniendo en esencia los mismos resultados que el trabajo de Hertz, pero desarrollados de manera sistemática para cubrir todas las consecuencias.

El trabajo de Hertz de 1884 que hemos referido, es poco mencionado en general, debido a que la exposición sistemática completa de sus ideas fué publicada por Hertz, después del descubrimiento de las ondas que hoy llevan su nombre, en dos extensos trabajos "Sobre las ecuaciones fundamentales de la electrodinámica de los cuerpos en reposo"(Wied.Ann. der Ph.,40,577,1890) y "Sobre las ecuaciones fundamentales de la electrodinámica de los cuerpos en movimiento" (Wied. Ann. d. Ph., 41, 369, 1890).

En estas publicaciones, lomismo que en las posteriores, Hertz adopta definitivamente elplanteo de Maxwell, proponiéndose solamente eludir toda aparente fundamentación, prefiriendo postular directamente las ecuaciones, antes que postular en forma confusa una serie de hipótesis que conduzcan a ellas.

"La propia manera de tratar de Maxwell no señala a este respec-
"to el objetivo buscado, pues oscila a menudo a un lado y otro, en-
"tre los puntos de vista que Maxwell halló ya preparados, y los que
"él mismo introdujo"... "esta marcha deja la insatisfactoria sensa-
"ción de que son incorrectos los resultados, o el camino seguido
"para hallarlos" (l.c.,40,578)

Quedan en el formalismo de Maxwell - según Hertz - resabios de ideas antiguas ya no adecuadas : los potenciales , por ejemplo, pertenecen al lenguaje de la teoría de acciones a distancia, y deben desaparecer de los resultados finales. El vector desplazamiento ($\vec{D}$) es en el vacío indiscernible de $\vec{E}$, y hablar de ambos como vectores distintos hace creer que es posible hallar un espacio libre de éter donde medir $\vec{E}$ independientemente de $\vec{D}$. Ni potenciales ni vector desplazamiento figuran pues explícitamente en el trabajo.-

Sentado esto, Herz propone aceptar las ecuaciones de Maxwell,-mencionando al respecto el trabajo de Heaviside de 1886 y añadiendo: "En este respecto, la prioridad corresponde pues a Heavisida". Acabamos de ver que, a pesar de esta frase, la prioridad es del mismo Hertz, que publicó dosaños antes que Heaviside . Es posible que Hertz no considerara en mucho su propio trabajo de comparación entre las electrodinámicas "opuestas", pero ello no impide reconocer-su prioridad.

Las ecuaciones fundamentales de Hertz son

$$\operatorname{rot}\vec{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mu\vec{H}}{\partial t} \qquad \operatorname{rot}\vec{\mathcal{H}} = \frac{4\pi}{c}\vec{i} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varepsilon\vec{\mathcal{E}}}{\partial t}$$

y la novedad con respecto a su primer trabajo, está en la definición de "electricidad libre" y "electrididad verdadera", y análog. para el mgnetismo, según las expresiones

$$\operatorname{div}\vec{\mathcal{H}} = 4\pi m_l \qquad \operatorname{div}\vec{\mathcal{E}} = 4\pi q_l$$

$$\operatorname{div}\mu\vec{\mathcal{H}} = 4\pi m_v \qquad \operatorname{div}\varepsilon\vec{\mathcal{E}} = 4\pi q_v$$

donde los subíndices <u>l</u> y <u>v</u> indican libre y verdadero, resp.

Para hallar las ecuaciones aplicables a cuerpos en movimiento, Hertz supuso válidas <u>las formas integrales de las ecuaciones anteriores</u>, es decir,

$$\oint\vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Sigma}\mu\vec{\mathcal{H}}\cdot d\vec{\sigma} \qquad \oint\vec{\mathcal{H}}\cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Sigma}\varepsilon\vec{\mathcal{E}}\,d\vec{\sigma}$$

y se trata ahora se saber si los dominios de integración -superficie límite, curvas, etc. - deben considerarse como pertenecientes a los cuerpos móviles, o no,- Hertz admite que deben considerarse adheridas a los cuerpos, y las ecuaciones diferenciales que resultan son por lo tanto (según conocidos teoremas):

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mu\vec{H}}{\partial t} + \frac{1}{c}\operatorname{rot}(\vec{v}\times\mu\vec{\mathcal{H}}) - \frac{\vec{v}}{c}\operatorname{div}\mu\vec{\mathcal{H}}. \\ \operatorname{rot}\vec{\mathcal{H}} = \frac{4\pi}{c}\vec{i} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varepsilon\vec{\mathcal{E}}}{\partial t} - \frac{1}{c}\operatorname{rot}(\vec{v}\times\varepsilon\vec{\mathcal{E}}) - \frac{\vec{v}}{c}\operatorname{div}\varepsilon\vec{\mathcal{E}}. \end{cases}$$

En la segunda de estas ecuaciones aparece, además de la corriente de desplazamiento ya usual, la corriente llamada de Röntgen, observada cualitativamente por éste haciendo girar un dieléctrico en un campo eléctrico constante pero no uniforme (Sitz.ber. d. Berl. Ak.d.Wiss.,26 Febrero 1885) , y la corriente de convección, provocada por un cuerpo cargado que se mueve, y que fué observada experimentalmente por Rowland (American Journal, 1878) haciendo girar un disco electrizado, con gran velocidad, y comprobando la existencia deun campo magnético.

La electrodinámica de los cuerpos en movimiento de Hertz corresponde a la cinemática de Galileo, y es covariante con una transformación de coordenadas a un sistema de ejes móviles, en esta cinemática. Además, en ella se cumple el principio de conservación de la electricidad, de la energía, de la igualdad de acción y reacción.

El defecto experimental de la electrodinámica de Hertz está en que al suponer que el éter es completamente arrastrado por los cuerpos móviles, es impotente para explicar la experiencia de Fizeau (Ann. de chimie et de ph., 3, 55, p.385, 1859) de arrastre parcial de la luz por el agua en movimiento. Por lo tanto, las experiencias de óptica quedan en general fuera de estas ecuaciones.

Otro defecto está en que el campo eléctrico previsto en la primera ecuación de Hertz cuando un dieléctrico se mueve en el interior de un campo magnético ($\mathrm{rot}(\vec{v} \times \mu \vec{\mathcal{H}})$), existe, fué medido por H.A.Wilson (Phil.Trans., A, 204, p.121, 1904), pero no concuerda exactamente en valor con lo previsto por Hertz.-

La electrodinámica de Hertz fué la primera electrodinámica covariante; es correcta, pero no lo es la cinemática sobre la cual se apoya.(*) Cuando Einstein construyó la actual electrodinámica covariante, debió cambiar solamente la cinemática para obtener el resultado correeto. Hasta el título del trabajo fué conservado.--

(*) Esto es, su cinemática no es compatible con la propagación de agentes físicos (ver II §1)

11. El electrón, y la electrodinámica de Lorentz

Un lustro después de conocerse el fundamental trabajo de Hertz se publicó en Leiden la "Tentativa de teoría de los fenómenos eléctricos y ópticos en los cuerpos en movimiento" de Hendrik Anton Lorentz (1853 -1928), en la cual se ensaya la hipótesis opuesta a la de Hertz, de que el éter se encuentre en reposo incluso en el interior de los cuerpos.

Cuando poco mas tarde, en 1899, Henri Poincaré (1854-1912) volvió a dietar en la Sorbonne un curso sobre Electricité et Optique, expuso la nueva teoría de Lorentz, y al ocuparse de las dificultades aún inexplicadas comentaba: " Un día u otro "habrá pues que modificar nuestras ideas en algún punto importante, "y romper el marco en que tratamos de hacer entrar a la vez los fenó- "menos ópticos y los fenómenos eléctricos"(Electricité et Opt.,p.612) La edición de sus Lecciones fué publicada en 1901, y , recordémoslo una vez más, el marco fué roto por A.Einstein en 1905.

Entotal, entre el planteo del problema y su solución, queremos decir, entre la"Electrodinámica de los cuerpos en movimiento" de Hertz y el trabajo homónimo de Einstein , mediaron solamente 15 años. --

El ensayo ("Versuch...") de Lorentz incorporó a la electrodinámica la hipótesis corpuscular de la electricidad que era sugerida desde la época de Faraday por sus leyes dela electrólisis.

Es indudable que la idea de explicar la corriente eléctrica mediante "átomos" eléctricos pertenece a Weber (pues Faraday, como hemos visto, jamás quiso aceptar las consecuencias últimas de sus propios descubrimientos). Reproduzcamos otra frase al respecto:

"En la propagación general de la electricidad, debe admitirse "que a cada átomo ponderable de electricidad se adhiere un átomo "eléctrico" (Weber, Abh.Leipzig 10,1871; Werke, IV,p.247)

En 1881, G. Johnstone Stoney (1826 - 1911) en una conferencia que pronunció sobre unidades ante la Royal Soc. de Dublin, exponía:

"La naturaleza nos provee una cantidad de electricidad perfectamente determinada, independiente de los cuerpos particulares..." "Según Lodschmidt, un milímetro cúbico contiene 2,5 x 10^{18} molé - "culas,... de modo que la masa de una molécula de hidrógeno es de "10^{-25} gramos, y la de un átomo la mitad". Como en un segundo "cada "ampére debe descomponer cerca de 10^{-5} de hidrógeno,"..." tenemos "10^{-20} Coulomb como la unidad fundamental que la naturaleza misma " nos dá".

El mismo Stoney propuso el nombre de "electrón" para la "car- "ga de electricidad asociada a la valencia química" (Trans. Roy. Soc. Dublin, (2)4, p.583 ;1891). Durante varios años se empleó indistintamente la palabra , hasta que Drude (Ann.d.Ph.,1,p.566; 1900) propuso llamar ión a las cargas moviles durante la electrólisis, y electrón a los átomos eléctricos de Weber; es la acepción que aún usamos.

La teoría de Lorentz constituyó, según su misma expresión, "un retorno a las ideas de Weber" (Versuch,..pág. 8) "con muchos "puntos de contacto con los desarrollos de Clausius, al que solo "le faltó la propagación de las acciones con velocidad finita" (Enz.d.Math.Wiss., V,2,p.154).

El electrón de Lorentz es una esfera rígida, en cuyo interior no valen las leyes ordinarias del electromagnetismo, y bastante pequeña"para considerarlo muchas veces como un punto";"to- "das las acciones electromagnéticas tienen lugar por intermedio "del éter, y de tal manera, que en general toda variación en el "estado de movimiento de los electrones tenga una influencia que "se propague con la velocidad de la luz"(Enz.d.Math.Wiss.,p.154)

No hay otra corriente eléctrica mas que la corriente de convección de electrones, si bien en un dieléctrico el movimiento de éstos está limitado . ~~Elxxxxtada~~"Los fenómenos en el éter li- "bre están determinados por las habituales ecuaciones de Maxwell- "Hertz-Heaviside, y pueden describirse mediante dos vectores:

"la excitación eléctrica (Erregung) $\vec{d}$, y la intensidad de "campo magnético, $\vec{h}$. "El éter en el interior de la materia "no tiene diferencia con el éter libre".

Las ecuaciones fundamentales de Hertz son pues, tal como las escribe Lorentz para los electrones:

$$\mathrm{rot}\ \vec{h} = \frac{1}{c}(\dot{\vec{d}} + \rho\vec{v}) \qquad \mathrm{rot}\ \vec{d} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{h}}$$

$$\mathrm{div}\ \vec{h} = 0 \qquad \mathrm{div}\ \vec{d} = 4\pi\rho$$

a las cuales añade como postulados la ecuación de continuidad para la electricidad, y la expresión de la fuerza que se ejerce sobre un eléctrón en un campo:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0$$

$$\vec{f} = e\left[\vec{d} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{h}\right]$$

Lorentz admite así que los fenómenos electrodinámicos están determinados exclusivamente por los electrones, pero supone de manera explícita que un electrón en movimiento genera dos tipos de fuerzas: eléctrica y magnética. Es evidentemente insatisfactorio haber suprimido las fuentes de magnetismo $(\mathrm{div}\,\vec{h}=0)$ pero retener los efectos magnéticos, que eran su única justificación.

Nuestra trabajo ha consistido en probar a eliminar también esos efectos, y hacer una teoría electrónica mas consecuente consigo misma, en la que no haya sino electrones y acciones eléctricas.-

Las ecuaciones de Lorentz para el éter libre satisfacen el principio de conservación de la energía, en la forma dada por Poynting, pero no al principio de acción y reacción, pues la fuerza $\vec{f}$ que un electrón ejerce sobre otro no está dirigida según la redta que los une. "Este es el punto débil de la teoría de Lorentz", señaló Poincaré (Elec. et Opt.,p.448), "Me parece muy difícil admitir que el principio de reacción "sea violado, aún en apariencia , y que ya no valga si se con- "sideran solamente las acciones sufridas por la materia pon-

"derable y se deja de lado la reacción de esta materia sobre "el éter (p.612).

Por su parte, Lorenz era indiferente a este problema, y escribía ("Versuch"..,p.28): "Lo mas simple sería suponer que sobre un elemento de volumen del éter, considerado en conjun- "to, nunca actúa una fuerza...Por cierto que esto atenta contra "el principio de la igualdad de acción y reacción - pues tene- "mos fundamento para afirmar que el éter ejerce fuerzas sobre la "materia ponderable " pero, en cuanto yo veo, esto no nos obliga "a considerar ese principio como una ley fundamental de validez "sin límite".

Liénard propuso una modificación al principio: "desde el momento en que se rechaza la teoría de acción a distancia, escribía Liénard en L'Éclairage Électrique, 14,p.457,1898, y "que, se admite, por el contrario, tardan un cierto tiempo en "propagarse a través del éter, ya no puede haber en cada ins- "tante igualdad de acción y reacción, pues no se producen en "el mismo momento. Todo lo que puede pedirse es que la resul- "tante de todas las fuerzas sea en promedio (temporal) nula, "y esto se cumple en la teoría de Lorentz" .

Sin embargo, no siempre es posible conformarse con este promedio , y Max Abraham (1875 - 1922) propuso, mas sencillamente, llamar "impulso electromagnético" a la magnitud que era necesario añadir: $\frac{1}{4\pi c}\int d x\, h\, dt$ para restaurar la validez del principio (Ann. d.Ph.,10,p.105,1903). De inmediato aceptó Lorentz esta solución (Enz.d.Math.Wiss.,p.163, 1903).

Con este agregado la teoría de Lorentz se acerca más al punto de vista de Maxwell de las acciones electromagnéticas transmitidas por contigüidad a través de tensiones en el éter: en efecto, es posible definir un tensor que describa formalmente las tensiones del éter:

$$T_{ij} = d_i d_j - \frac{d^2}{2}\cos(i,j) + h_i h_j - \frac{h^2}{2}\cos(i,j)$$

y entonces las fuerzas que actúan sobre un cuerpo son calculables mediante una integración extendida a la superficie del cuerpo, tal y como si se tratara de un problema de elasticidad (comparar con el tensor de Maxwell, en nuestra pág. 51), pero esto se consigue al precio de introducir términos carentes de significado, como son

$$-\frac{1}{4\pi c}\int_{\Sigma}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{d}\times\vec{h})\,d\sigma$$

Es interesante que, simultáneamente, la teoría de Lorentz se haya aproximado también a los puntos de vista de Riemann, Lorenz, etc. En efecto, los vectores fundamentales satisfacen las ecuaciones

$$\vec{h} = \operatorname{rot}\vec{a} \qquad \vec{d} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\dot{\vec{a}}$$

en las que figuren potenciales φ y $\vec{a}$ idénticos a los de Riemann, y que obedecen a las ecuaciones de propagación:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} = -4\pi\rho \qquad \Delta\vec{a} - \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{a}} = -\frac{1}{c}\rho\vec{v}$$

Estas ecuaciones fueron estudiadas por A. Liénard (L'Éclair. Électr., 16, pp. 5,53,106;1898) y por Wiechert (Arch. Néerl., (2), 5, p.549;1900) para el caso de cargas puntuales.

Los potenciales φ y $\vec{a}$ no están unívocamente determinados:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi + \frac{\dot{\chi}}{c} \\ \vec{a}_1 = \vec{a} - \operatorname{grad}\chi \end{cases},$$

donde χ es una función escalar cualquiera, ~~xxxxxxxx~~ dan los mismos valores de $\vec{d}$ y $\vec{h}$. Si los potenciales fueran variables auxiliares sin significado físico particular, no habría inconveniente en adoptar una arbitraria χ ; el problema debiera quedar sin modificación. Pero para poder escribirlas ecuaciones de propagación, es necesario en cambio fijar los potenciales mediante la relación , o "condición de Lorentz":

$$\operatorname{div}\vec{a} + \frac{\dot{\psi}}{c} = 0$$

que equivale a exigir que también ψ cumpla la ecuación de propagación, en la forma: $\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\ddot{\psi} = 0$

Aunque las ecuaciones anteriores fueron introducidas como postulados por Lorentz, es posible buscarles justificativos. Por ejemplo, las ecuaciones para $\vec{d}$ y $\vec{h}$, y la fuerza $\vec{f}$, resultan por razonamientos formales sobre losprincipios de la mecánica, en forma similar a la usada por Maxwell. Poincaré las deduce precisamente a partir de las ecuaciones de Lagrange, como Maxwell hiciera, (Elec. et Opt., p.427-446),mientras Lorentz las halla a partir del principio de D'Alembert (Enz. d. Math. Wiss.,V,2,p.164).

Cualquiera sea el formalismo empleado, lo importante es que se postula que la corriente está formada por movimiento de cargas o por variación del vector $\vec{d}$. Está claro que la corriente de desplazamiento, introducida así , no tiene otro justificativo que el de permitir llegar a la propagación de las ondas electromagnéticas. Pero el precio de este postulado es que si bien una corriente de desplazamiento ejerce acciones ponderomotrices sobre un electrón en movimiento , recíprocamente este eléctrón no ejerce acción alguna sobre la corriente de desplazamiento, que no es material. Es imposible, por lo tanto, satisfacer la simetría de acción y reacción.

No podemos entrar en detalles sobre los éxitos de la teoría de Lorentz en la expliación del efecto Hall,efecto Zeeman, dispersión de la luz en dieléctricos, etc., temas por ahora alejados de nuestro trabajo. La mejor exposición de dicha teoría continúa siendo hoy, como cuando se redactó , la de Poincaré, y a ella remitimos al lector.

Para nuestros fines basta recordar que Lorentz construyó una electrodinámica para medios materiales, en la que las ~~vec-~~ ~~tores~~ expresiones fundamentales se obtienen por promedio de los vectores $\vec{d}$ y $\vec{h}$, y que coincide prácticamente conla de Maxwell. Aunque los dieléctricos están formados, para Lorentz, por éter en reposo en el que se encuentra la materia como partículas distantes unas de otras, la luz en el interior del dieléctrico se propaga con velocidad resultante menor que en el exterior, y precisamente con la velocidad c/n, como calculó P.P. Ewald (Ann. d. Ph., 49, 1, 117, 1916).

Para escribir las ecuaciones referidas a un sistema en movimiento con velocidad $\vec{w}$, Lorentz introdujo un "tiempo local"

$$t' = t - \frac{1}{c^2}\,\vec{w}\cdot\vec{r}$$

y supuso además que las longitudes se contraían, físicamente, en la dirección del movimiento, en la proporción $v^2/2c^2$ por unidad de longitud.

Con el "tiempo local" Lorentz consiguió que sus ecuaciones mantuvieran la misma forma en el caso de ejes en movimiento, y pudo explicar también todos los fenómenos luminosos en que intervinieran términos no menores que (w/c).

Con la contracción de longitudes justificó la experiencia de Michelson-Morley (Am.J. of Sc.,(3),34,p.333,1887) en que precisamente se alcanzó el orden de magnitud $(v/c)^2$ sin hallar señal de arrastre del éter. La misma hipótesis de contracción había sido hecha ya por Fitzgerald años atrás, en sus cursos, y apareció publicada, en los "Aberration Problems" de O.Lodge (Phil. Trans., 184 A,p.727,1893). "Por extraña que parezca la hipótesis a primera vista - escribe Lorentz ("Versuch...", Collected Papers V,122) - "hay que conceder que no es muy rebuscada si se supone que las fuerzas moleculares están determinadas también por el éter, como se admite hoy de las eléctricas y magnéticas" .

Es interesante que Lorentz supone real el acortamiento de las longitudes - esto es, observable para todos los experimentadores - mientras que supone ficticio el "tiempo local" que le sirve para escribir sus ecuaciones. En la relatividad se supone exactamente lo opuesto: tanto el tiempo como las longitudes son función del observador.-

12. Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento.

Si la contracción de Fitzgerald aparecía como cosa natural a Lorentz, no sucedió lo mismo con Poincaré: "Esta extraña propiedad parecería un verdadero "golpe de pulgar" de la naturaleza "para evitar que el movimiento absoluto de la tierra pudiera ser "revelado por los fenómenos ópticos. Esto no podría satisfacerme, "y creo mi deber decir aquí mi sentir: considero como muy proba-"ble que los fenómenos ópticos no dependan mas que de los movi-"mientos relativos de los cuerpos materiales en presencia, fuentes "luminosas o aparatos ópticos, y esto hasta magnitudes del orden "del cuadrado o del cubo de la aberración, sino rigurosamente. A "medida que las experiencias se hagan mas exactas, este principio "será verificado con más precisión.

"¿Será necesario un nuevo 'golpe de pulgar', una hipótesis "nueva, a cada aproximación? Evidentemente no; una teoría bien "hecha deberá permitir demostrar el principio de unsolo golpe, en "todo su rigor". (Electr. et Opt., p.536)

"... la imposibilidad de poner en evidencia un movimiento "de la materia respecto al éter, y la igualdad que sin duda tiene "lugar entre acción y reacción sin tener en cuenta la acción de la "materia sobre el éter", son dos hechos cuya conexión parece eviden-"te. (Elect. et Opt., p.613) .

La obra de Poincaré tantas veces aquí citada, conteniendo sus lecciones de Curso, presentó el problema existente en la electrodinámica de manera tan concisa y autorizada, que el joven estudiante Alberto Einstein (1879-   ), que en 1905 preparaba su examen de tesis de doctorado , pudo disponer de la documentación suficiente para atreverse a atacar el tema.

En esa fecha se conocía ya la invariancia de las ecuaciones electrodinámicas frente a las trnsformaciones de Lorentz, y W.Voigt (Gött. Nachr., p.41, 1887) había mostrado ya que la ecuación de las ondas ($\square\varphi = 0$) se ~~hacía~~ mantenía invariable si se la escribía en sistema en movimiento en el que se empleara un "tiempo local" similar al que después u ~~sáxxxxxxx~~ Lorentz por primera vez en 1892 (Arch.Néerl.,25,p.363;1892).

De este modo, Einstein poseía casi todo el andamiaje formal; el principio que Poincaré mencionara, con tanta firmeza que vaticinaba su verificación cada vez mas precisa, fué elevado por Einstein al rango de "Principio de Relatividad", suponiendo que "... en to- "dos los sistemas en que valen las ecuaciones mecánicas han de va- "ler las mismas ecuaciones electrodinámicas y ópticas" (Ann. d. Ph., 17,891;1905).

Este principio de relatividad era legítimo en la mecánica, en donde se lo conocía desde la época de Galileo. Pero, naturalmente, no era aplicable sin más a la electrodinámica, puesto que ya lo había hecho Hertz en1900 sin lograr resolver todas las dificultades. La admisión del principio exigió revisar nuevamente la cinemática,"... ya que losenunciados de cada una de las electro- " dinámicas se ~~xxxxx~~ refieren a relaciones entre cuerpos rígidos "(sistemas de coordenadas) , relojes y procesos electromagnéticos. " En la insuficiente consideración de esta circunstancia está la raíz "de las dificultades con que actualmente debe luchar la electrodiná- "mica de los cuerpos en movimiento ". (A.E. La Relatividad, pág.17)

La revisión cinemática consistió precisamente en el empleo de un "tiempo local" similar al de Lorentz, pero con unidad variable, que Einstein demostró que era el único compatible con el hecho concreto de que la luz se propaga con velocidad constante en cualquier dirección.

Su trabajo fundamental de 1905 contiene dos partes: enla primera, cinemática, se establecen las ecuaciones de transformación de coordenadas. En la segunda, electrodinámica, se demuestra la invariancia de las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el vacío , y se calculan los fenómenos de aberración, presión de la luz, efecto

Doppler, y al ocuparse de la dinámica del electrón se halla la dependendia de la masa con la velocidad que ya había mencionado, por otro camino, F. Hasenoehrl en 1904 (Ann. d. Ph., 15, 344, 1904).

El mismo año, Einstein halló la relación entre energía y masa (Ann.d.Ph., 18, p.639; 1905) que ya estaba implícita en el impulso electromagnético introducido por Abraham.-

Al puntualizar de esta manera las herramientas de que dispuso Einstein para realizar su trabajo, está muy lejos de nuestro ánimo el disminuir la importancia de lo que hemos considerado ya en otra oportunidad el trabajo mas corto, mas sencillo, y de mayor importancia de este siglo (A.E., La Relatividad, prólogo, pág.8). A nuestro juicio, de físico, el hecho de que Einstein dispusiera de los medios para efectuar el trabajo y lo realizara, es precisamente su mayor mérito. De haberlo realizado sin medios, nuestra opinión de físico no interesaría.--

- - - - - - - - -

No deseamos prolongar esta introducción histórica con citas del trabajo de Einstein ni comparaciones con nuestros resultados. Por una parte, el resto de la tesis está dedicada a ello, en cuanto hasta la fecha he conseguido hacer. Por otra parte, el trabajo de Einstein no hizo sino abrir un período, y poco se ganaría resumiendo y comentando un prólogo a toda la física actual.. Es mucho mas sensato dedicar el esfuerzo directamente al problema de esa física actual.-

Nota bibliográfica sobre "El desarrollo Histórico".

De la idea inicial de dedicar cuatro o cinco páginas a la historia del problema que me ocupa en este trabajo, llegué insensiblemente a la extensión actual, al ir hallando en uno y otro autor fragmentos del hilo que fué comenzado a desenvrollar por Gauss en 1835 . Ante la imposibilidad material de hacer una reseña imparcial y completa de toda la historia de la electrodinámica, he optado por resumir lo que al lector pueda mejor ilustrarlo sobre ese hilo, hoy un tanto apartado del pensamiento corriente, que con mucha injusticia suele designarse "teoría de las acciones a distancia".-

El capítulo fué redactado sobre la base principal de las siguientes publicaciones:

Colección de Annalen der Physik (y parcial de Wiedemann Annalen)

F.Cajori, A History of Physics, Mac. Millan ,1938 (escrita hacia 1898)

André Marie Ampère, Memoires

J.Collo, T. Isnardi, Electricidad y Magnetismo, Esc.Nav.Mil.,1938.

A.Einstein, La relatividad, Memorias, Traducción Alsina Fuertes-Canals Frau, Edit. Emecé, 1950.

L.Euler, Opera Omnia,Serie I ,I, y Serie III,1,1926. (Biblioteca Observ. Astr. La Plata)

M.Faraday, Experimental Researches, (Ostwald's Klassiker, 1896, 1902, edición en alemán)

C.F.Gauss, Werke, Edición 1867 (Bibliot. Soc.Cient. Arg.)

G.Helm, Die Theorien der Elektrodynamik nach ihrer geschichtlichen Entwicklung, 1904. (Bibliot. Inst. de Física La Plata)

T. Isnardi, Curso de Relatividad (dictado en el I.de F., 1944)

E.Hoppe, Geschichte der Physik, en Handbuch der Physik, I, 1,1926

E.Hoppe, Histoire de la Physique, Ed. Payot, Paris, 1928.

Laplace, Oeuvres (Bibliot. Esc. Naval Militar)

H.A.Lorentz , Collected Papers (Bibliot. I. de Fís.)

J.C.Maxwell, Traité elementaire de électricité (póstumo), con una

Notice sobre los trabajos de Maxwell, de William Garnett (Ed. Gauthier-Villars, Paris, 1884)

J.C.Maxwell, A Treatise on Electricity and Magnetism , 3a Ed., 1904 .

I.Newton, Principia Philosophia Naturalis, Edición italiana, Stock, Roma, 1925)

W.Pauli, Relatitit"atstheorie, en Enziklop. der Mathem. Wissensch., Tomo V,2. (Bibliot. Inst. de Fís.) Escrito en 1920.

H.Poincaré, Électricité et Optique, 2a. Ed., Gauthier-Villars, Paris, 1901

R.Reiff y A. Sommerfeld, Standpunkt der Fernwirkung. Die Elementargesetze. (Enz. der Math. Wiss., tomo V,2,p. 1, escrito en 1903) - (Bibliot. Ins. de Fís.)

W.Weber y R.Kohlrausch - Elektrische Strom- und Widerstandsmessung, 1840 (En Ostwald's Klassiker, N.142, 1904)

II MECANICA RELATIVISTA

1.- Los postulados

Mas que una teoría, la relatividad es un programa, un modus operandi general para la física teórica, en el mismo sentido que las matemáticas en conjunto son un modus operandi para el físico.

La idea esencial delprograma relativista, que Einstein enunció como Postulado de Relatividad, consiste en : escribir las ecuaciones de la física teórica de manera tal que su forma no se altere al transcribirlas de uno a otro sistema de referencia. Un programa tan vasto no ha sido todavía cumplido, y las dificultades matemáticas que presenta lo demorarán sin duda mucho tiempo.

Tampoco ha sido cumplido el programa mas restringido de comenzar por escribir de manera covariante las ecuaciones frente a transformaciones lineales y homogéneas de las coordenadas y el tiempo.

Es de esta relatividad restringida que nos ocuparemos aquí. Los sistemas de referencia admisibles serán todos de ejes triortogonales y rectos, y estarán animados de velocidades constantes unos con respecto a otros.[1]

Las fórmulas se hacen en este caso de fácil manejo, pues son casi siempre reductibles a manipuleos algebraicos cerrados, y la dificultad del avance se encuentra mas bien en cuestiones agenas a la física, y lindantes con la gnoseología o la psicología. El hecho de que la variable tiempo, por ejemplo, resulte transformada de un sistema de referencia a otro, ha demorado el progreso al detener la atención durante décadas.

El postulado de Relatividad fué adoptado por razones de origen empírico, como todos -probablemente - los enunciados que pueda hacer la ciencia. Pero una vez admitido como postulado , la teoría subsiguiente es tan independiente de la experiencia como lo pueda ser la geometría. La "utilidad" del programa relativista es ajena al progra-

(1) Notas al fin del Capítulo, pág 117.

ma mismo, y las "verificaciones exprimentales" de las consecuencias relativistas del Postulado de Equivalencia de los sistemas de referencia, son manifestación sola de la habilidad del experimentador para describir sus experiencias en el lenguaje que halló mas adecuado.

Pero además del postulado anterior, Einstein incluyó otros en su teoría, con vistas a dar principio inmediato al programa que se había trazado. Es importante consignar que todos estos otros postulados no son operativos, sino de existencia: por ejemplo, la posibilidad de construir reglas y relojes idénticos en número infinito (infinito continuo,pues necesitamos un reloj para cada punto del espacio!), homogeneidad é isotropía del espacio y del tiempo, posibilidad de que observadores de distintos sistemas comparen sus respectivas medidas siempre que lo necesiten - a pesar de que sus sistemas se mueven con velocidad constante y los observadores se alejan uno de otro irremediablemente después de haberse visto enfrentados un solo instante, etc.

El postulado mas importante, único que hizo Einstein explícitamente en su trabajo, consiste en admitir que la velocidad de la luz es independiente de la velocidad de la fuente que la emite (en el vacío). Tomado así, es por cierto un postulado de mucha menor jerarquía que el de Relatividad, pues alude a una medición concreta de un fenómeno, tiene aplicación donde dicho fenómeno sea importante, y tiene la validez que el número de cifras obtenido en la medición le acuerde. No es un programa sino un hecho.

Nuestro punto de vista es considerar el Principio o Postulado de Relatividad como único postulado esencial y definitorio de la relatividad, y los demás enunciados -que son muchos, como advertimos- como proposiciones cómodas que tienden a facilitar el programa adecuándolo a la masa de conocimientos que ya poseemos y a la forma en que habitualmente los describimos, pero tal vez reemplazables por otros enunciados,equivalentes o no.[1]

No emplearemos aquí el postulado de constancia de la velocidad de la luz en esa forma, pues deseamos derivar las ecuaciones de la mecánica sin inmiscuir en ellas conceptos provenientes del otro capítulo, pero usaremos en cambio, como enunciados cómodos, el del principio de inercia, el de causalidad, y el concepto de "agente físico", usados de manera implícita en el trabajo de 1905.

Dado un cuerpo aislado, admitimos que es siempre posible elegir un sistema de referencia cartesiano ortogonal, tal que con respecto a él el cuerpo se mueva en línea recta o se mantenga en reposo. (Principio de inercia)

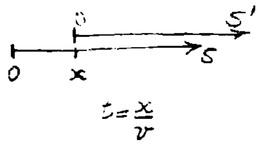
Se trata de un postulado físico, de modo que sobreentendemos que el cuerpo será "aislado" si la influencia de los demás está por debajo de nuestras mediciones; el sistema de referencia elegido deberá ~~xxx~~ estar definido por cuerpos o puntos materiales, para que el enunciado tenga sentido. El mérito del Principio de inercia está en que simplifica los cálculos, pues la trayectoria del cuerpo libre es una recta, y en que es fácil realizar prácticamente un sistema inercial utilizando las estrellas fijas, o cualquier sistema en movimiento uniforme respecto a ellas.

Es evidente que hay mas comodidad que necesidad en este Principio, pues nada impide, a priori, elegir un sistema de referencia en que los cuerpos aislados describan círculos, por ejemplo.

Pasamos ahora a considerar dos sistemas de referencia inerciales, es decir, obtenidos por transformaciones lineales de coordenadas y tiempo del sistema de las estrellas fijas. Analizaremos someramente los postulados que introduzcamos, en el momento de utilizarlos.

2.- Las ecuaciones de transformación de coordenadas.

Sean S y S' dos sistemás, móviles uno respecto al otro, y ambos inerciales. Se mueven a lo largo de sus ejes x, que están unidos, y suponemos que cada sistema está munido



de observadores que disponen de infinitas reglas é infinitos relojes.

Imaginemos superadas las dificultades de construir tales elementos, "idénticos" entre sí, y pasemos a controlar los relojes de modo de asegurar su sincronismo.

Para ello, el observador de S los dispone según el eje x y regula su marcha de tal manera, que cuando el origen O' va pasando frente a cada reloj, ese reloj marque x/v, siendo x la abscisa del punto en que el reloj se encuentra, y v una constante.

Lo mismo haga el observador de S', obligando a sus relojes a marcar el instante -x'/v cuando O pasa frente a ellos, si x' es la abscisa del reloj en S', y v la misma constante.

Este procedimiento puede llamarse "sincronización de relojes en cada sistema", pues nos da un criterio para ajustar la marcha de sus mecanismos. Además, de aquí resulta que los sistemas S y S' tienen movimiento uniforme uno respecto al otro, por definición, y que la velocidad se mide por el mismo número, sea considerada como velocidad de O' sobre el eje x, o de O sobre el eje x'.

Sobre la base de que los sistemas son inerciales, añadimos ahora la hipótesis de que los espacios sean homogéneos:

un reloj cualquiera de S indica el mismo lapso para el pasaje frente a él de un metro cualquiera de S'. Y lo mismo para los relojes de S', respecto al tiempo que tardan en pasar los metros de S.

Hallaremos las ecuaciones de transformación de las coordenadas (tiempo incluído), comenzando por atribuirles forma lineal y homogénea, en virtud de la homogeneidad supuesta:

$$\begin{cases} x' = \beta x + \gamma t \\ t' = \delta x + \zeta t \end{cases} \qquad 21$$

Razonando ahora

desde S:

El origen del "otro" sistema es O', cuya abscisa vale cero en su sistema, y v.t en el mío. Luego

$$\begin{cases} 0 = \beta v + \gamma \\ t' = (\delta v + \zeta)t \end{cases}$$

que puedo escribir

$$\begin{cases} \boxed{\gamma = -\beta v} \\ t'/t = \delta v + \zeta \end{cases}$$

desde S':

El origen del "otro" sistema es O, cuya abscisa vale cero en su sistema, y -v.t' en el mío. Es decir

$$\begin{cases} -vt' = \gamma t \\ t' = \zeta t \end{cases}$$

de donde deduzco

$$\begin{cases} \boxed{-\gamma/v = \zeta} \\ t'/t = \zeta \end{cases}$$

Las dos segundas ecuaciones vinculan variables. Ambas dicen, leídas en forma "covariante": La indicación del reloj en el origen del sistema de enfrente y la del reloj de mi sistema con el cual lo comparo, están en una relación constante. El valor numérido de esa constante debe ser el mismo, calculada desde S ó desde S'. Luego:

$$\boxed{\delta v + \zeta = \frac{1}{d}}$$

Con las tres ecuaciones enmarcadas, las fórmulas de transformación resultan

$$\begin{cases} x' = \beta(x - vt) \\ t' = \beta\left(t - \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 v} x\right) \end{cases}$$

Los razonamientos hasta aquí son similares a los usados siempre en la deducción de las fórmulas de transformación, salvo en lo que se refiere a la forma de sincronizar los relojes. Valga la aclaración de que si no era le forma ordinaria de sincronizar en relatividad, es en cambio la forma de sincronizar relojes en la vida diaria, pues los disponemos a lo largo de un paralelo terrestre y los ajustamos de modo que al pasar frente a ellos el punto Aries (origen O'), indiquen λ/v, siendo λ la longitud geográfica y v una constante. No hemos hecho sino aplicar esa idea al movimiento rectilíneo uniforme.

Obsérvese que recíprocamente, podríamos probar a aplicar nuestras fórmulas al caso de un sistema de coordenadas rotatorio, como es el caso de la Tierra. Ello no es posible, debido a que el movimiento es periódico, y cada reloj podría ser comparado infinitas veces - como ocurre en realidad- con el pasaje del mismo punto. Ello impone una condición que nosotros no impusimos a las ecuaciones. El sistema de la Tierra no es inercial, y las conclusiones de la relatividad restringida no le son aplicables.-(3)

En las ecuaciones de transformación falta por determinar una constante - función eventual de v. Supongamos que en el sistema S tienen lugar dos fenómenos en el mismo instante t, a una distancia Δx entre sí ; desde el sistema S' los dos fenómenos no serán simultáneos sino sucesivos, con

$$\begin{cases} \Delta x' = \beta \, \Delta x \\ \Delta t' = -\dfrac{\beta^2-1}{\beta^2 v} \, \Delta x \end{cases}$$

(pusimos t igual a cero)

Mientras el observador en S describe su experiencia en términos de simultaneidad, el de S' hablará de dos hechos sucesivos, en el orden A-B, por ejemplo. Esto tal vez le sugiera enunciar una ley consistente en una funcionalidad $B = f(A)$, y para explicar que A antecede siempre a B, concluirá por atribuir al evento A la propiedad de emitir un agente físico que recorriendo la distancia que separa ambos puntos, produzca al llegar a P el fenómeno observado.

Este concepto de agente físico le resultará natural el observador de S', pues una vez que el evento A se ha producido todo se mantiene sin novedad hasta un rato después, en que B se produce. Si no deseamos admitir que B se produjo espontáneamente , concluiremos que el tiempo que demoró en producirse es el que tardó el agente físico en llegar con la orden.

Con la misma naturalidad, el observador de S hablará de una acción a distancia entre los eventos A y B, para él simultáneos.

Pero imaginemos ahora un tercer observador, ubicado en un sistema S" móvil con velocidad <u>-v</u> con respecto a S. Para él los eventos se suceden en el orden B-A, y la funcionalidad será ahora $A = f(B)$ figurando B como emisor de un agente, y A como receptor, lo que es claramente incompatible -dentro de nuestro programa de covariancia de las leyes - con la descripción desde S'.

Quedan dos caminos para mantener la covariancia: suponer $\beta = 1$, con lo cual la simultaneidad se asegura en todos los sistemas, y <u>tenemos acción a distancia en todos ellos, o suponer $\beta \neq 1$ y renunciar a hallar funcionalidad entre dos eventos distantes simultáneos.</u>

La acción a distancia parece menos aceptable - probablemente por razones psicológicas - que la otra, y es así como llegamos a elegir la hipótesis de que <u>existen agentes físicos que se propagan de un punto emisor a un punto receptor, insumiendo un tiempo finito en el trayecto</u> .

En nuestra opinión, este es el postulado de trabajo mas importante contenido en la relatividad. Fué usado por Einstein desde el primer momento - tal vez sin notar que se trataba de un postulado- pues comenzó su trabajo sincronizando relojes mediante señales de luz que se propagaban con velocidad <u>finita</u>.(4)

Mostraremos en seguida que es suficiente ese postulado para completar las ecuaciones.

Si dividimos x'/t', podemos llamar V' al cociente, pues será la velocidad con que un punto se moverá en el sistema S. Análogamente, x/v será la velocidad V en el sistema S del mismo punto.

Nuestras ecuaciones dan

$$V' = \frac{V - v}{1 - \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 v} V}$$

es decir, el <u>teorema de adición</u> de Einstein.

Pero supongamos que el punto móvil sea un agente físico. Es necesario, según nuestra hipótesis, que en ningún caso resulte su velocidad V' infinita, cualquiera sea v, pues en ese sistema tendríamos "acción a distancia" y en los demás nó. Por lo tanto, es necesario que por aplicación reiterada del teorema de adición la velocidad V' no supere nunca un cierto valor límite, digamos $\underline{c}$.

Si hacemos $v = c$, por ejemplo, V no debe ser superior a $\underline{c}$, valga lo que valga V'. Imponemos esta condición algebraica y resulta, de manera inmediata,

$$\beta = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \qquad 2.1$$

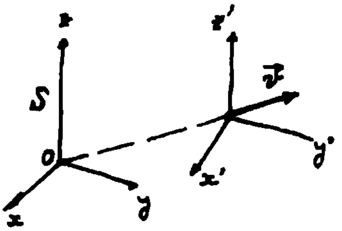
con lo cual hemos completado las ecuaciones de transformación de Lorenz-Einstein.

Puede comprobarse por la forma de la ecuación del "teorema de adición" que la velocidad $\underline{c}$ no puede ser obtenida por aceleraciones impresas a un cuerpo, pues dada una velocidad inicial cualquiera, el incremento que le falta para llegar a valer $\underline{c}$, es siempre $\underline{c}$. En cambio, nada podemos afirmar sobre si existirá realmente o nó un agente físico que <u>tenga</u> velocidad $\underline{c}$. Las experiencias son las que lo afirman, independientemente de la relatividad.

Notemos que una de las habitualmente consideradas "consecuencias relativistas", a saber, la no existencia de sólidos rígidos, no es tal consecuencia, sino postulado esencial; de haber sólidos rígidos tendríamos acción a distancia, entre un extremo y otro del sólido. -- (5)

3.- Cinemática relativista[6]

Agrupamos aquí, para referencia futura, el conjunto de ecuaciones correspondientes a la transformación de Lorentz en tres dimensiones, desde un sistema S a otro sistema S' que se mueve respecto al anterior con velocidad $\vec{v}$, y de tal modo que en el instante $t = 0$ los orígenes coincidan, los ejes homónimos se superpongan, y el reloj de O' marque $t' = 0$.



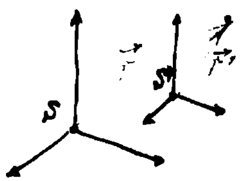
Para obtener estas ecuaciones a partir de las anteriores, es necesario:

1° Hacer una rotación de ejes en el sistema S, de modo que tengamos un eje X en la dirección del movimiento, y ejes Y Z que le sean normales.

2° Aplicar las transformaciones del párrafo anterior al sistema XYZ para pasar al sistema X'Y'Z'.

3° Hacer rotar los ejes X'Y'Z' en su propio sistema, hasta que coincidan con los x'y'z' que deseamos.

Las dos rotaciones se hacen en reposo, de modo que valen las ecuaciones de la geometría analítica. Se llega a



$$\begin{cases} \vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}\left[\dfrac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{v^2}(1-\beta) + \beta t\right] & 3.1 \\[2ex] t' = \beta\left(t - \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{c^2}\right) & 3.2 \end{cases}$$

mientras el teorema de adición de velocidades cobra el aspecto

$$\vec{V}' = \frac{\vec{V} - \vec{v}\left[\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{V}}{v^2}(1-\beta) + \beta\right]}{\beta\left(1 - \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{V}}{v^2}\right)} \qquad 3.3$$

Añadimos también la siguiente identidad

$$\beta_{V'} = \beta_v \beta_V \left(1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{V}}{c^2}\right) \qquad 3.4$$

cuya justificación no tiene particular dificultad.

$$\beta_{V'} = \left(1 - \frac{V'^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad \beta_V = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad \beta_v = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

Entre el vector posición $\vec{r}$ y el instante que indica un reloj colocado en su punta, t , vale la relación invariante

$$c^2t'^2 - r'^2 = c^2t^2 - r^2 = c^2t_0^2 \qquad 3.5$$

cuyo significado es inmediato: es el instante (por c^2) que marcaría un reloj en el origen de un sistema de coordenadas móvil que hubiera cruzado por O en el instante O, y se encontrara ahora en el extremo del vector $\vec{r}$. Mas brevemente: el "tiempo propio" del punto que define el extremo del vector.*

De acuerdo con el principio de relatividad, los sistemas S y S' son equivalentes, y todas las ecuaciones que hemos hallado o hallemos para transformar magnitudes del S al S', deben servir también para escribir transformaciones del S' al S, sin más que cambio de nombres en las variables y de signo en la velocidad v .

Puede comprobarse que en efecto, toda el álgebra relativista tiene esa cómoda propiedad, de la que haremos frecuente uso.

4.- La cantidad de movimiento

En la mecánica pre-relativista se pasaba de la cinemática a la dinámica introduciendo el concepto de masa. Siguiendo a Mach, la masa relativa de dos cuerpos se define como el cociente de las aceleraciones que mútuamente se imparten ambos cuerpos en un proceso de choque, atracción o repulsión entre ambos; ese cociente es constante, por postulado esencial. Hecho esto, una integración conduce entonces a la ley de conservación de la cantidad de movimiento, válida para todoslos casos en que tenga aplicación el concepto de masa, siempre que podamos hablar del par de cuerpos que intervienen como de un sistema aislado.(7)

La energía mecánica de los dos cuerpos (energía cinética en el caso mas sencillo en que no haya atracciones entre ellos) cumple también un principio de conservación, pero de alcance mucho mas restringido: se mantiene constante solamente si los cuerpos son perfectamente elásticos, y en su choque no intervienen otras fuerzas que las de tipo posicional. En colisiones inelásticas intervienen fuerzas disipativas, y con ellas aparece destrucción de energía cinética y generación de calor.

Se percibe enseguida la dificultad de seguir un camino similar en la mecánica relativista; habiendo renunciado a enunciar leyes en que aparezcan efectos simultáneos a distancia, no habrá entre dos cuerpos más acciones posibles que el choque directo, o la emisión y recepción de un oportuno "agente físico", al que a su vez deberemos otorgarle algunas de las propiedades que asignamos a los cuerpos, si es que la frase ha de ser inteligible.(8)

Pero, aún limitándonos a colisiones y emisión de esos agentes, hallamos que, contrariamente a la definición de Mach, no podemos en este caso introducir el concepto de masa como el cociente de dos aceleraciones. Las aceleraciones se transforman de manera complicada frente al grupo de Lorentz, y una aceleración que sea constante en un sistema inercial puede no serlo en otro. La definición de

Mach no es covariante en el sentido de Einstein.

Es necesario introducir las magnitudes dináminas por otra vía, que sea equivalente en el caso pre-relativista, y sea además de posible enunciado covariante, para que nos permita emplear la cinématica ya deducida.

Según acabamos de mostrar, hay en la mecánica pre-relativista un enunciado de tanto alcance como la misma definición de masa, pues se deduce de ella la ley de conservación de la cantidad de movimiento. Tentaremos basar sobre ella nuestra dinámica covariante.

Para hacer de la cantidad de movimiento una magnitud fundamental, la definiremos como un vector asignado a cada cuerpo, que obedece al siguiente criterio: diremos que dos cuerpos tienen iguales cantidades de movimiento, cuando moviéndose libres sobre la misma recta, en sentidos contrarios, en el instante en que choquen tengan velocidad común nula.

La definición es independiente de la naturaleza de los cuerpos. No nos detendremos aquí en la enumeración operacionalística de la forma de medir dichas cantidades de movimiento, ni en la rutina de mostrar cómo pueden sumarse dos cantidades de movimiento, para probar por completo el carácter de magnitud física del concepto así introducido. Aceptemos, pues, que el impulso o cantidad de movimiento de la mecánica pre-relativista puede erigirse en magnitud fundamental, de definición y medida mas o menos cómodas.

Está claro que no se trata de una magnitud reductible a conceptos cinemáticos puros, pues se refiere a fenómenos en que intervienen algo más que espacios y tiempos. Pero podemos vincularla con la velocidad del cuerpo correspondiente, pues impulso y velocidad son vectores aplicados al mismo punto material, y con la misma recta de acción.

Indicamos ahora esta dependencia lineal entre impulso y velocidad, en la forma $\vec{p} = m\vec{v}$, y decidimos llamar <u>masa</u>, por razones obvias, al coeficiente así introducido. Es una definición formal, pues nada hemos supuesto sobre las propiedades de dicho coeficiente (salvo el signo, que elegimos convencionalmente positivo, respetando la convención usual).

El enunciado físico que nos proponemos verter ahora al lenguaje relativista, es el siguiente:

<u>Cuando un par de cuerpos, con cantidades de movimiento $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_2$ se entrechocan, la suma vectorial $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ se mantiene constante</u>.

Al no aludir explícitamente a un particular sistema de referencia, el enunciado es el mismo en cualquier sistema Galileano. Veamos que consecuencias implica su covariancia.

Suponemos observadores en los sistemas S y S', y que ambos describen el mismo choque de dos cuerpos: (9)

Desde S

$$m_1(v_1)\,\vec{v}_1 + m_2(v_2)\,\vec{v}_2 = \bar{m}_1(\bar{v}_1)\,\vec{\bar{v}}_1 + \bar{m}_2(\bar{v}_2)\,\vec{\bar{v}}_2$$

Desde S'

$$m_1'(v_1')\,\vec{v}_1' + m_2'(v_2')\,\vec{v}_2' = \bar{m}_1'(\bar{v}_1')\,\vec{\bar{v}}_1' + \bar{m}_2'(\bar{v}_2')\,\vec{\bar{v}}_2'$$

Los subíndices se refieren a cada cuerpo, y los miembros derechos de las ecuaciones, en los que hemos distribuído rayas (-) sobre todas las variables, contienen las funciones y variables tal como serán <u>después</u> del choque.

Conociendo la velocidad $\vec{V}$ del sistema S' con respecto al S, mediante el teorema de adición de velocidades traducimos $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ al sistema S', obteniendo después de algunas transformaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{m_1(v_1)}{\beta_{v_1}}\beta_{v_1'}\ \vec{v}_1' + \dfrac{m_1(v_1)}{\beta_{v_1}}\beta_{v_1'}\ \vec{v}_0\left\{\dfrac{\vec{v}_0\vec{v}_1'}{v_0^2}(\beta_{v_0}-1)+\beta_{v_0}\right\}+\ldots = \ldots+\ldots \\ \dfrac{m_1'(v_1')}{\beta_{v_1}}\beta_{v_1'}\ \vec{v}_1' + \qquad\qquad\qquad +\ldots = \ldots+\ldots \end{cases}$$

Se escribió en detalle solamente el término que corresponde a un cuerpo, antes del choque; falta otro término igual al escrito, en cada ecuación, pero con subíndice 2, para el segundo cuerpo. Los miembros derechos son formalmente idénticos a los izquierdos, sin mas que distribuir rayas sobre todas las variables, para simbolizar sus valores después del choque.

Restamos ahora las dos ecuaciones últimas, y hallamos

$$\left[\frac{m_1(v_1)}{\beta_{v_1}} - \frac{m_1'(v_1')}{\beta_{v_1'}}\right]\beta_{v_1'}\ \vec{v}_1' + \frac{m_1(v_1)}{\beta_{v_1}}\beta_{v_1'}\ \vec{v}_0\left\{\frac{\vec{v}_0\vec{v}_1'}{v_0^2}(\beta_{v_0}-1)+\beta_0\right\}+\ldots = \ldots+\ldots$$

donde volvemos a omitir un término igual, pero con índice 2, y un miembro derecho con rayas.

Esta expresión es una combinación lineal entre los cinco vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_1', \vec{v}_2', \vec{v}_0$, velocidades de los dos cuerpos antes y después del choque, y velocidad del sistema S' sobre el S. Pero es evidente que tales cinco vectores no pueden ser linealmente dependientes, pues las velocidades antes del choque , y $\vec{v}_0$, son completamente arbitrarias. También las velocidades después del choque son arbitrarias dentro de muy amplios límites, pues nada hemos dicho sobre la sustancia que compone los cuerpos, y bastaría elegir a estos sucesivamente de arcilla y de acero para tener, con iguales velocidades iniciales, muy distintas velocidades finales.

En otras palabras, la covariancia de la ley de conservación de impulsos en los choques nos impone aceptar las condiciones

$$\frac{m_1(v_1)}{\beta_{v_1}} = \frac{m_1'(v_1')}{\beta_{v_1'}} \qquad \frac{m_2(v_2)}{\beta_{v_2}} = \frac{m_2'(v_2')}{\beta_{v_2'}}$$
$$\frac{\bar{m}_1(\bar{v}_1)}{\beta_{\bar{v}_1}} = \frac{\bar{m}_1'(\bar{v}_1')}{\beta_{\bar{v}_1'}} \qquad \frac{\bar{m}_2(\bar{v}_2)}{\beta_{\bar{v}_2}} = \frac{\bar{m}_2'(\bar{v}_2')}{\beta_{\bar{v}_2'}} \qquad 4.1$$

$$\frac{m_1(v_1)}{\beta_{v_1}}\beta_{v_1'}\left\{\frac{\vec{v}_0\vec{v}_1'}{v_0^2}(\beta_0-1)+\beta_0\right\}+\ldots = \ldots+\ldots$$

5.- Dinámica relativista

Las cuatro primeras ecuaciones anteriores 4.1 son de idéntico contenido : <u>para un cuerpo móvil dado, el cociente m/β resulta independiente del observador.</u>

Tal es la condición a que está sujeto el concepto de <u>masa</u>. La transformación de la masa de un sistema a otro en consecuencia es

$$m' = m\,\frac{\beta_{v'}}{\beta_v} \qquad 5.1$$

Si existe un sistema físico de referencia en el que el cuerpo esté en reposo, en ese sistema será $m_0 = m/\beta_v$, lo justifica el nombre de "masa en reposo" para el cociente m/β .

Pero si asignamos a los "agentes físicos" las mismas propiedades de los cuerpos, como es necesario hacer para la validez del principio de conservación del impulso durante los procesos de emisión o absorción, para ellos en cambio no tendrá sentido la frase "masa en reposo", pues no es posible hallar un sistema en que se encuentre en reposo un agente que se propaga con velocidad <u>c</u> , como se dijo en pág. 98 .

Por ejemplo, la frase "masa en reposo de un fotón en el vacío" carece de significado. En cambio, <u>la ley de transformación de la masa de un sistema a otro tiene sentido</u>: es el llamado efecto Doppler, descripto en el lenguaje de la física corpuscular.-

Introduciendo en la ecuación última del párrafo 4 el resultado de transformar las masas, se llega a

$$\frac{m_1'(v_1')}{\beta_{v_1'}}\beta_{v_1'}\left\{\frac{\vec{v}_0\cdot\vec{v}_1'}{v_0^2}(\beta_{v_0}-1)-\beta_{v_0}\right\} + \frac{m_2'(v_2')}{\beta_{v_2'}}\beta_{v_2'}\left\{\frac{\vec{v}_0\cdot\vec{v}_2'}{v_0^2}\cdot(\beta_{v_0}-1)+\beta_{v_0}\right\} = \ldots+\ldots$$

o, reordenando convenientemente,

$$\frac{\vec{v}_0}{v_0^2}\left[m_1'(v_1')\,\vec{v}_1' + m_2'(v_2')\,\vec{v}_2'\right](\beta_0-1) + \beta_0\,(m_1'+m_2') = \ldots+\ldots$$

El corchete es nada más que la cantidad de movimiento total del sistema, escrita desde S'. En el miembro derecho tendremos el mismo corchete, calculado después de la colisión; nuestro postulado dinámico es precisamente que su valor no es alterado por el choque, de manera que ambos términos se van, y quedamos con

$$m_1' + m_2' = \bar{m}_1' + \bar{m}_2' \qquad 5.2$$

ecuación que podemos llamar de "conservación de la masa total", y que resulta así una condición relativista deducida de la "conservación del impulso". Masa é impulso no resultan tan independientes como en la mecánica pre-relativista.

Este resultado es largo alcance, y trasciende de los límites de la mecánica, pues hemos obtenido una ley de conservación válida incluso en choques no elásticos que produzcan calor. Es necesario recurrir a la termodinámica para hallar un enunciado parecido.

En efecto, la termodinámica asigna a cada "sistema aislado" un número, que mide por definición su energía interna, y que permanece constante cualesquiera sean los procesos a que el sistema aislado se someta, siempre que no se recurra a acciones a distancia. Las condiciones para la constancia de la "energía interna" son por lo tanto las mismas que nosotros teníamos para "masa total constante", y ninguna contradicción podrá sobrevenir si convenimos en identificar ambas leyes de conservación. La relatividad permite de esta manera considerar el Primer Principio de la Termodinámica como una consecuencia de la conservación del impulso, y válido donde ella lo sea.

Una cuestión de menor importancia, a decidir, es la de las unidades. Si deseamos conservar las unidades habituales de energía y de masa, cosa conveniente pues a pequeñas velocidades no hay diferencia alguna entre los conceptos pre- y los relativistas de masa, será necesario hallar una relación constante entre "gramos" y "ergios".

Ponemos por lo tanto $E = k\,m$, siendo E la energía del sistema cuya masa es m. Determinaremos k.

Visto desde un sistema con respecto al cual m sea móvil, podremos hablar de su energía "cinética", es decir, del exceso de energía que contiene por el hecho de moverse: $m - m_0 = m_0\,(\beta - 1)$ y esta expresión debe coincidir, a menos del factor k , con la energía cinética de la mecánica de Newton, en el caso en que la velocidad del sistema sea pequeña. Ponemos por ello $\frac{1}{2} m_0 v^2 = m_0(\beta - 1)k$ y hallamos el límite de esta expresión para v tendiendo a cero.

El resultado dá $k = c^2$, o sea

$$E = mc^2 \qquad 5.3$$

Esta ecuación es aplicable también a fotones, pues no es necesario que exista "masa en reposo" para llegar a ella. Bastaría considerar el problema como un asunto meramente dimensional, y buscar el único valor constante que puede tomar E/m; es precisamente c^2.-

Cabe destacar que si bien la "masa total" se mantiene constante en un choque de cualquier tipo, no sucede lo mismo con la "masa en reposo" de los cuerpos. En general los cuerpos reales tienden a aumentar su masa en reposo por efectos de los choques; en escala macroscópica decimos que se calientan. En escala microscópica decimos que pasan a un estado excitado. Las únicas excepciones que parece haber, de cuerpos que posean masa y reposo y no posean niveles de excitación, son las llamadas "partículas elementales"; en eso radica precisamente su importancia.-

Conocido el impulso y la energía de un cuerpo en un sistema S, su transcripción a un sistema S' es inmediata, haciendo uso del teorema de adición de velocidades .

Sean $E, \vec{p}$, $E', \vec{p}\,'$ energía é impulso en S y S' respectivamente. Tendremos

$$\vec{p}' = m'\vec{V}'$$
$$E' = m'c^2$$

y después de emplear las fórmulas 3.3 y 3.4 quedan

$$\begin{cases} \vec{p}' = \vec{p} - \vec{v}\left[\frac{\vec{p}\cdot\vec{v}}{v^2}(\beta_v - 1) + \beta\frac{E}{c^2}\right] & 5.4 \\ \frac{E'}{c^2} = \beta_v\left(\frac{E}{c^2} - \frac{\vec{p}\cdot\vec{v}}{c^2}\right) & 5.5 \end{cases}$$

Comparando con fórmulas previas, observamos que $\vec{p}$ y E/c^2 se transforman como $\vec{r}$ y t, respectivamente. (3.1) y (3.2)

En el caso en que $\vec{p}$ y $\vec{v}$ sean paralelos, obtenemoslas fórmulas más cómodas

$$\begin{cases} p' = \beta_v\left(p - v\frac{E}{c^2}\right) & 5.6 \\ \frac{E'}{c^2} = \beta_v\left(\frac{E}{c^2} - \frac{pv}{c^2}\right) & 5.7 \end{cases}$$

De estas expresiones resulta que un conjunto que posea impulso nulo en un sistema ($\vec{p} = 0$) tendrá un impulso $\vec{p}'$ diferente de cero en todo otro sistema, siempre que su energía E no fuese también nula. Elegiremos dos ejemplos: 1°, dos cuerpos que marchen en sentidos opuestos sobre la misma recta, con impulsos iguales y de distinto signo; desde cualquier otro sistema de referencia tendrán un impulso, proveniente de la energía total de los dos cuerpos.

2° Un conjunto de cuerpos en reposo, vinculados mediante resortes. Vistos desde otro sistema, tendrán un impulso proveniente de la energía de los cuerpos y <u>también de la energía elástica de los resortes</u>.

Las ecuaciones también plantean la posibilidad de conjuntos que tengan impulso finito pero energía nula vista desde un cierto sistema; dichos conjuntos tendrían impulso y energía desde cualquier otro sistema de referencia.

La relación entre E, energía, $\vec{p}$, impulso, y m_0 masa en reposo para un mismo cuerpo , resulta dada por

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = m_0^2 c^2 \qquad 5.8$$

Se nota aquí que en el caso de agentes físicos que se propaguen con la velocidad límite c, todo sucede como si para ellos fuera $m_0 = 0$, y la relación entre impulso y energía toma el aspecto sencillo

$$E = |p| c \qquad 5.9$$

que Planck empleó por primera vez de manera general. Si se prefiere emplear, para los procesos de emisión o absorción, el flujo de energía por segundo y por centímetro cuadrado de superficie , que indicamos por el vector $\vec{S}$, entonces obtenemos

$$\vec{g} = \frac{\vec{S}}{c^2} \qquad 5.10$$

donde $\vec{g}$ es la "densidad de impulso" , o impulso por cada centímetro cúbico de espacio lleno por el agente físico.

6.- La fuerza

Un cuerpo aislado posee siempre, por definición, impulso constante. Cuando en un determinado cuerpo se observe variación en el valor de $\vec{p}$, debe concluirse que sobre él actúan otros cuerpos - incluyendo, eventualmente, agentes físicos.

En los procesos de choque hasta ahora estudiados, la variación en el impulso era mas o menos brusca, é interesaba sobre todo el valor final. Ello es, aquí como en la física no covariante, careterístico del estudio de las colisiones.

La trayectoria de un cuerpo sujeto a choques es siempre una poligonal, formada por segmentos rectos. Pero la experiencia diaria nos muestra la posibilidad de otro movimiento, curvo , cuya descripción es imposible empleando solamente choques en número finito.

La relatividad no puede proponer hipótesis sobre el origen de este movimiento curvo - como no las proveyó para ninguna de las leyes hasta aquí analizadas; pero puede juzgar si una hipótesis propuesta es o no covariante, y cuáles son sus consecuencias en caso afirmativo.

Por esta razón incluímos el concepto de fuerza, vinculado estrechamente a la existencia de movimiento variado. Llamemos fuerza a

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} m\vec{v}. \qquad 6.1$$

A diferencia de lo que sucede en la mecánica de Newton, la fuerza no es aquí un vector en la dirección de $d\vec{v}/dt$, sino que contiene una componente en la direcc ión de la velocidad, debido a que m es variable.

Si el movimiento curvo del mismo cuerpo es juzgado por observadores del sistema S' , hallarán por definición $\vec{F'} = \frac{d\vec{p'}}{dt'}$, y tendremos la traducción de medidas de uno a otro sistema, empleando las 5.4 y

$$\frac{dt'}{dt} = \beta_0\left(1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}_0}{c^2}\right) = \frac{\beta_{v'}}{\beta_v} \qquad 6.2$$

Se tiene de este modo

$$\vec{F}' = \frac{\beta_{v'}}{\beta_{v}} \frac{d}{dt}\left\{\vec{p} - \vec{v}_0\left[\frac{\vec{p}.\vec{v}_0}{v_0^2}(1-\beta_{v_0}) + \beta_{v_0}\frac{E}{c^2}\right]\right\} .$$

Por otra parte, tomando en cuenta posible variación de m_0,

$$\frac{dE}{dt} = c^2\frac{dm_0}{dt} + \vec{F}.\vec{v} \qquad 6.3$$

de modo que la ley de transformación resulte por fin:

$$\vec{F}' = \frac{1}{\beta_{v_0}\left(1-\frac{\vec{v}.\vec{v}_0}{c^2}\right)}\left\{\vec{F} - \vec{v}_0\left[\frac{\vec{F}.\vec{v}_0}{v_0^2}(1-\beta_{v_0}) + \beta_{v_0}\frac{\vec{F}.\vec{v}}{c^2} + \beta_{v_0}\frac{dm_0}{dt}\right]\right\} \qquad 6.4$$

No es, por cierto, una expresión cómoda: las fuerzas se transforman de distinta manera que espacios, impulsos, etc. Para hacerla mas manejable, la descompondremos en dos direcciónes, según $\vec{v}_0$ y según la normal a $\vec{v}_0$. Entonces quedan

$$\begin{cases} F'_{\parallel} = \dfrac{1}{\left(1-\frac{\vec{v}.\vec{v}_0}{c^2}\right)}\left\{F_{\parallel} - \dfrac{v_0}{c^2}\vec{F}.\vec{v} - v_0\dfrac{dm_0}{dt}\right\} \\ F'_{\perp} = \dfrac{1}{\beta_{v_0}\left(1-\frac{\vec{v}_0\vec{v}}{c^2}\right)} F_{\perp} \end{cases} \qquad 6.5$$

Observemos que la posible variación de la masa en reposo, m_0, repercute solamente sobre la componente de la fuerza que es paralela al movimiento relativo de los dos sistemas, $\vec{v}_0$.

Una transformación conveniente se obtiene eligiendo el sistema S de modo que en él el cuerpo esté en reposo ($\vec{v} = 0$). Entonces es

$$\begin{cases} F'_{\parallel} = F_{\parallel} - v_0\dfrac{dm_0}{dt} \\ F'_{\perp} = \dfrac{F_{\perp}}{\beta_{v_0}} . \end{cases} \qquad 6.6$$

Después de haber definido la fuerza y calculado su valor en un sistema en función de los datos de otro, ocupémonos del origen físico de las fuerzas que habrán de presentársenos en las aplicaciones:

a) fuerza exterior constante

Uno de los esquemas favoritos de la física elemental pre-relativista es suponer actuando una fuerza constante sobre un cierto cuerpo, originada en acciones exteriores que no se detallan, pero que en forma mas o menos velada incluyen el modelo antropomórfico de un hombre ejerciendo un esfuerzo constante.

Para nuestros fines es mas adecuado idear el siguiente modelo:

el cuerpo sobre el que actúa la fuerza es un blanco sobre el que hace impacto un cañón que le dispara constantemente proyectiles con velocidad, masa y frecuencia conocidas. Llamando v,m,f, a esos datos, la fuerza que el cuerpo recibe vale precisamente $F = vmf$, pues tal es la variación por segundo del impulso.

fuerza $\vec{F}$

El modelo puede usarse, según convenga, con un chorro de agua en lugar de cañón, o aún con un chorro de electrones, luz, o cualquier otro ente capaz de transportar impulso.

Suponemos que una vez llegados al blanco, los proyectiles desaparecen, de modo que no aporten energía al cuerpo debida a su masa propia.

b) fuerza posicional

Un cuerpo puede estar sujeto a la acción de fuerzas dependientes de su posición si está vinculado mediante resortes a otros cuerpos. En este caso, el modelo obvio es el de ligaduras elásticas que respondan a la ley de Hooke, o a cualquier otra ley ficticia adecuada para los razonamientos; es fácil idear un resorte en el que la fuerza no sea proporcional a su elongación: basta añadirle topes u otros artificios, a medida que se deforma.

Un caso muy importante del que deberemos ocuparnos, es el de cuerpos entre los cuales existen fuerzas "inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia que los separa", sin que el vínculo sea visible. Es el caso en las fuerzas eléctricas y en las fuerzas gravitatorias.

La relatividad restringida no permite "explicar" el origen de tales fuerzas, como no explica el origen de las anteriores. Pero puede estudiarlas siempre que logremos enunciados covariantes para los fenómenos a que ellas den lugar. La relatividad limita su papel a describir. El material que describe y sus consecuencias le son ajenos.

Para tratar tales fuerzas podemos imaginar un sistema complicado de resortes cuyo efecto equivalga al de las fuerzas reales. La perturbación de una de tales fuerzas se propagará con velocidad finita, como cualquier otra señal física.

c) Fuerza debida a variación de energía

En la ecuación 6.4 hallamos que la fuerza que se mide desde un sistema en movimiento contiene términos de origen muy distinto que los considerados ya: si la fuerza desarrolla potencia sobre el cuerpo a que está aplicada ($\vec{F}.\vec{v}$) , si la masa en reposo del cuerpo varía (dm_0/dt) y finalmente el mero hecho de que el sistema se mueva ($\vec{F}.\vec{v}_0$) dan variaciones del impulso asociado a la energía que deben computarse como fuerzas.

7 .- Covariancia del equilibrio

Limitaremos nuestras consideraciones a puntos materiales. El equilibrio se define, para un punto, como la constancia de su impulso y energía.

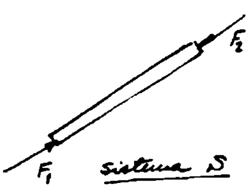
Está claro que una transformación de Lorantz a otro sistema en movimiento uniforme ha de mantener esta constancia, por la isotropía del espacio y el tiempo. En consecuencia, la definición de equilibrio es covariante.

Otra forma equivalente de enunciado, es definir el equilibrio de un punto cuando la fuerza actuante sobre él es nula, y su masa en reposo es constante. No hay sino diferencia de palabras con la definición anterior.

Tangamos ahora un cuerpo material, extenso. Si todos sus puntos están en equilibrio - en el sentido anterior - podremos decir que el cuerpo está en equilibrio, y está afirmación será covariante.

(Recordemos que hemos de limitarnos a puntos; en la mecánica de cuerpos extensos, se define el equilibrio cuando la suma de los impulsos de todos los puntos se mantiene constante, y la suma de los momentos de dichos impulsos también. Nuestro caso es mas restringido)

Apliquemos las definiciones a un ejemplo:(41)

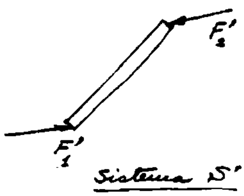


Una varilla se encuentra en equilibrio en un sistema. Sobre cada uno de sus puntos actúan tensiones eláticas, y en sus puntos superficiales actúan, además, fuerzas exteriores a la varilla; el equilibrio consiste - según nuestra definición - en que la suma total de fuerzas actuantes sobre cada elemento material es nula , y en que la temperatura se mantiene estacionaria.

Transformemos ahora a un sistema en movimiento, Las fuerzas elásticas y las fuerzas exteriores tienen otro valor, pero continúan equilibrando la varilla, punto a punto.

El mismo ejemplo, considerado en la mecánica del cuerpo, tiene muy diferente tratamiento:

Del hecho que la suma de las fuerzas sea nula en un sistema, no se deduce de inmediato la nulidad en otro, debido a que la suma se realiza en un instante distinto para cada punto, por la trasformación del tiempo.



Consideremos solamente las fuerzas exteriores. Al instante t en que se sumaron en el sistema S, corresponden ahora t'_1 y t'_2, un instante para cada punto de aplicación, pues no son coincidentes.

Supongamos, para fijar ideas, que las fuerzas comenzaron a actuar en el instante t. Esto es siempre posible suponerlo sin pérdida de generalidad. Desde el sistema S', se verá actuar a una sola de dichas fuerzas durante el lapso $t'_2-t'_1$, por lo que el sistema tendrá un impulso adicional

$$\vec{G}'_t = \int_{t'_1}^{t'_2} \vec{F}'_1 \, dt' \quad . \qquad 71$$

Si las fuerzas son constantes, esto no ha de modificar el equilibrio; pero si las fuerzas son función del tiempo, la derivada de este impulso deberá ser tomada en cuenta en el balance de las fuerzas totales que actúan.

Y el ejemplo no ha concluído; el equilibrio entre las fuerzas exteriores aplicadas a la varilla, solo era posible por la deformación elástica del material, que creaba tensiones opuestas a la acción exterior. Esta deformación elástica supone un cierto trabajo realizado por las fuerzas exteriores, y existente en forma de energía potencial en la varilla . Sea U esta energía potencial, cuyo valor numérico dependerá del material; tendremos por este motivo un nuevo impulso a añadir al sistema,

$$\vec{G}_u = \frac{U}{c^2} \vec{v} \qquad 72$$

que será constante solamente si la varilla no cambia de dimensiones. Si las fuerzas son función del tiempo, la derivada de este impulso significará una nueva fuerza a añadir al sistema.-

En el caso muy simplificado de que la varilla sea rígida y las fuerzas constantes, tanto $\vec{G}_t$ como $\vec{G}_u$ son constantes y la suma de las fuerzas se mantiene nula aún sin tomarlos en cuenta.

Este caso sencillo presenta un único detalle interesante: la suma de los momentos de las fuerzas no es nula desde S', y es necesario calcular el impulso angular adicional entregado por una de las fuerzas, en el lapso $t_2 - t_1$.-

Esta forma de razonar deberá emplearse siempre que se trate del equilibrio de fuerzas no aplicadas en el mismo punto; es típica de la mecánica de los cuerpos, y también de la electrodinámica de las cargas puntuales, en la que aparecen fuerzas aplicadas a cargas distantes.(Ver III §9)

Por supuesto, estos detalles de cálculo provienen, como toda la mecánica relativista, de la hipótesis esencial de no simultaneidad, y son por completo independientes de la naturaleza de la fuerzas de que se hable, o del particular mecanismo por el que se mantenga el equilibrio entre ellas.-(12)

NOTAS

(1)- pág. 91 . A.Einstein, Ann. d. Ph., 17,891, 1905. ("restringida")
A.Einstein, Ann. d. Ph., IL, 49, 1916. ("general")

(2)- pág. 92 . La bibliografía relativista, y en especial la referante a los postulados, es aburdante. Mencionemos como esenciales:

W.Pauli, Relativitätstheorie, en Enz.d.Math. Wiss.,V,2

Bridgman, The logic of modern Physics

H.Weyl, Raum,Zeit,Materie.

Nuestro trabajo no se aparta en nada de las ideas originales de Einstein, como no sea en la presentación -que suponemos original - y en las consecuencias. Pero ha habido, desde 1905, tentativas importantes de fundamentar la teoria de manera completamente distinta. Es interesante entre todas la de E.A.Milne: una exposición sumaria de todas sus ideas fué publicada en Phil.Mag., 34, 71; 1943 . No solamente es interesante en sí misma, sino por la crítica hecha a los postulados y consecuencias de Einstein.

(3)- pág. 96 . Buena parte de las consecuencias relativistas mas espectaculares se han obtenido haciendo recorrer circuitos cerrados a relojes, que "deben" retrasar al tornar al punto de partida. El primer ejemplo fué dado por el mismo Einstein, precisamente con un reloj del Ecuador terrestre, que debería retrasar con respecto a otro situado en otra latitud.

De inmediato fué tomada la idea por Langevin, quien ideó el famoso viajero que se aleja de la Tierra para retornar al cabo de medio siglo y hallar anciano a su bisnieto.

De una u otra forma, la "paradoja del reloj" se ha presentado siempre en la literatura relativista.

Entendemos que nuestra presentación no la resuelve, pero sí que la sortea. El movimiento es recto siempre.

(4)- pág. 97 . Fué Galileo quien por primera vez emitió de manera clara la hipótesis de que la luz es un fenómeno que se propaga, y para el cual tenga sentido el concepto cinemático de velocidad. Faraday fué el que emitió la misma hipótesis respecto a los fenómenos eléctricos, pues tal es el significado final de la "acción por contigüidad". Gauss intuyó y Maxwell realizó finalmente la estructura matemática descriptiva de las acciones que se propagan en el espacio.

Pero es la relatividad la que incorpora por primera vez, y para toda la física, la hipótesis general de que todos los fenómenos provocados a distancia lo son por agentes que se propagan. No es una hipótesis esencial, porque la simultaneidad absoluta es también un enunciado covariante. Pero es el enunciado más cómodo, considerando el conjunto de hechos de los que deseamos dar cuenta.

La constancia de la velocidad de la luz no es un enunciado, sino una consecuencia de ese punto de vista.

Que todo lo anterior podría ser alterado, suponiendo por ejemplo que la luz no se propaga, puede verse en el texto de Bridgman, Logic of Modern Physics.

(5)- pág. 98 . La no existencia de sólidos rigidos suele considerarse como una confirmación, o por lo menos una amabilidad de la naturaleza hacia la relatividad. Es verdad que no hay rigidez experimentalmente absoluta, pero ello no puede tomarse como consecuencia de una teoría formal como la relatividad. En primer lugar, la deformabilidad experimental de los actuales sólidos es tan grande, que [redacted] difiere en órdenes de magnitud de la que nos interesaría aquí; esto es, una rigidez que diera velocidad del sonido próxima de la de la luz (las actuales son inferiores a 10 km/seg).

En segundo lugar, si existiera unsólido bastante rígido como para que el sonido o la vibración mecánica se propagara a velocidad próxima a c, no podríamos hallar nunca una velocidad medida superior a c; estamos mostrando precisamente que la existencia de ese límite es consecuencia de nuestra forma actual de considerar los fenómenos.

(6)-pág. 99 . El contenido de este párrafo de resumen sigue la notación de

R. Becker Elektronentheorie, (2° tomo de "Abraham-Becker")
E. Madelung- Mathematischen Hilfsmitteln des Physikers, Edición Dover 1943, pág. 271.

La muy conocida identidad 3.4 no figura en dichos textos, pero sí en el clásico de

R.C.Tolman, Relativity and Cosmogony, Oxford 1934

Su justificación algebraica directa es sumamente larga.

(7)-pág. 101 . E.Mach, Mécanique, Ed. Hermann 1925, pág 211.

(8)-pág. 101 . Esta audaz hipótesis fué hecha por Planck. Es evidentemente necesaria para salvar el principio de acción y reacción de Newton en el caso de cuerpos que irradian.

La posición contraria, suponiendo que el principio de acción y reacción cae en falta en tales casos, está representada por Perrin: Les Principes..., (Edición en castellano de Espasa-Calpe, 1948)

(9)-pág. 103 . La idea general de este tratamiento se debe a Tolman. Su cálculo se encuentra también en:

A.Eddington, Mathematical Theory of Relativity
P.G.Bergmann, Introduction to the Theory of Relativity, Prentice Hall, 1946.

Tolman - y los otros - consideraron un tipo especial de choque, choque elástico y con direcciones especialmente elegidas; además, la constancia de la masa la introdujeron como postulado. En nuestro cálculo en cambio hemos adoptado el tipo de choque mas general, y hallado como consecuencia la conservación de la masa.

(10)-pág. . *Cálculo directo, pero no inmediato!*

(11) - pág. 114 . La definición usual de equilibrio como ausencia de fuerza y de momento en un cuerpo, es perfectamente transcriptible a la relatividad.

Si no la hemos desarrollado es por no requerirse esa definición en las aplicaciones que hemos de hacer en electrodinámica.

El ejemplo elegido es el que históricamente surgió con motivo de la experiencia de Trouton y Noble, cuya descripción y análisis figura en todo tratado elemental de relatividad. Ver, por ej., R.Becker, Elektronentheorie, último capítulo .

Recordemos aquí que la dificultad de esa experiencia está en explicar "porqué" no gira la varilla de nuestra esquema, vista desde un sistema de referencia en movimiento, siendo que las fuerzas exteriores originan una cupla sobre ella.

De intento hemos dejado sin analizar ese problema, ya elemental, para ocuparnos exclusivamente en el ejemplo de dos efectos más, que en la experiencia de Trouton y Noble son accidentalmente nulos.

(12) - pág. 116 . Que la ley de transformación de fuerzas de la mecánica debe ser la misma que la de las fuerzas del electromagnetismo, es un conocido resultado debido a Planck.

Pero la afirmación inversa, de que los problemas relacionados con las fuerzas electrodinámicas (impulso del campo, por ejemplo) tengan su origen en la transformación del tiempo, y no en cuestiones intrinsecas de la electrodinámica, es, en cuanto sepamos, una afirmación nueva.

Su justificación está en el capítulo de electrodinámica.

III - E L E C T R O D I N A M I C A   R E L A T I V I S T A

1.- Los hechos fundamentales

En la Mecánica Relativista hemos empleado como sistemas de referencia ejes cartesianos inerciales; un cuerpo aislado cualquiera se mantiene, con respecto a tales ejes, en reposo o en movimiento recto y uniforme, por definición. (II, §1)

Pero hay en la física macroscópica, por lo menos dos experiencias que no encuadran en la anterior imagen: las acciones que mútuamente se ejercen dos cuerpos situados en reposo a una cierta distancia (acción gravitatoria) , y las acciones - mucho mas intensas que las gravitatorias que algunos cuerpos pueden ejercerse situados en esas mismas condiciones.(Acciones eléctricas).

Son estos dos ejemplos de "acciones a distancia", y un cuerpo no puede considerarse "aislado" , en el sentido en que hemos empleado esta palabra, si en su proximidad hay otros cuerpos que puedan ejercer sobre él fuerzas gravitatorias o eléctricas.

El estudio de estos fenómenos de manera covariante puede encararse desde dos puntos de vista:

a) por una parte, modificar los sistemas de referencia convenientemente, de modo que ya incluyan las acciones a distancia de los cuerpos presentes. Esto equivale a reemplazar el principio de inercia por un enunciado mas general, y constituye el camino propuesto por Einstein en 1916 para dar cuenta de la gravitación; y por H.Weyl en 1918 para todas las acciones a distancia. Desde 1919 este camino es ensayado por Einstein.

b) por otra parte, es posible incorporar estos hechos a la relatividad que aquí consideramos, siempre que incorporemos también, de una u otra forma, un agente físico responsable de la transmisión de las acciones entre un punto y otro (ver pág. 97).

Es este segundo camino el que seguiremos a continuación.

Las diferencias entre las acciones gravitatorias y las eléctricas son las siguientes:

1. Las acciones gravitatorias entre dos cuerpos dependen exclusivamente de sus masas (en el sentido dinámico o inercial de la palabra), son constantes, - para cada par de masas cualquiera sea su naturaleza - y son únicas: representan atracción en todos los casos, sin excepción.
2. Las acciones eléctricas entre dos cuerpos dados son variables dentro de ciertos límites ("Carga" de los cuerpos), no parecen depender de la masa, y pueden ser atracciones, o repulsiones.

Estas características son las que han facilitado la incorporación de la gravitación dentro del esquema de sistemas de referencia generales (primer camino), y dificultan precisamente la incorporación de las acciones eléctricas en ese mismo plan.

Desde nuestro punto de vista en cambio, nos interesa mas destacar el aspecto común de ambas acciones:

3. Las acciones gravitatorias y las eléctricas, en el vacío, consisten en fuerzas inversamente proporcionales a los cuadrados de la distancia entre dos elementos, supuestos en reposo.

   Esto se puede escribir en la forma

$$\mathrm{div}\,\vec{\mathcal{E}} = 4\pi\rho \qquad 1.1$$

   donde ρ es la carga eléctrica - o masa gravitatoria-por unidad de volumen, y $\vec{\mathcal{E}}$ la fuerza que se ejercería sobre la unidad de carga eléctrica positiva - o de masa gravitatoria. La ecuación es común.

4. Tanto la carga eléctrica como la masa cumplen un principio de conservación (que para la carga aceptamos como postulado), que podemos escribir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) = 0 \qquad 1\ 2$$

si v es la velocidad del punto cargado - o del punto material - en que la densidad de carga - o de masa - sea ρ . Esta ecuación es también común.

5. Finalmente, nuestro formalismo relativista nos obliga a postular que el agente físico de las acciones gravitatorias, y el de las acciones eléctricas, sean o no el mismo, se propagan con igual velocidad, c .

La razón de este postulado es que no disponemos mas que de una velocidad para agentes en el vacío dentro de nuestra cinemática, y si deseamos aplicar la misma cinemática a los dos tipos de fenómenos,sus agentes deberán figurar con esa sola velocidad.

Este postulado no implica hipótesis alguna sobre la estructura de los agentes, ni tampoco sobre su unicidad; como todos los demás postulados deberá ser abolido el día que la experiencia muestre que conduce a contradicción, lo que aún no ha sucedido.

Las dos ecuaciones escritas son suficientes para deducir las restantes ecuaciones que satisfarán los fenómenos que discutimos.-

Recordemos también aquí que la relatividad es un esquema vacío que no puede predecir hechos físicos, pero puede, como todo esquema, fijar la forma de las ecuaciones que son compatibles con los postulados fundamentales empíricos y con el esquema mismo. -

2.- Magnitudes y ecuaciones fundamentales.

Derivando la primera ecuación respecto a t, y llevando a la segunda, obtenemos

$$\operatorname{div}\left[\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}+\rho\vec{v}\right]=0 \qquad 2.1$$

de modo que si la expresión entre paréntesis no es idénticamente nula, es posible hallar un vector cuyo rotor sea precisamente esa expresión. Definimos así un vector $\vec{\mathcal{H}}$ tal que

$$c \operatorname{rot}\vec{\mathcal{H}} = 4\pi\rho\vec{v}+\frac{\partial\vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \qquad 2.2$$

y como esta definición deja indeterminado a $\vec{H}$, la completamos añadiendo como condición

$$\operatorname{div}\vec{\mathcal{H}}=0 \qquad 2.3$$

(Con igual criterio pudimos haber hecho $\operatorname{div}\vec{\mathcal{H}}=4\pi\mu$; el formalismo subsiguiente no sería alterado) .

Nos ocupamos ahora de la covariancia de estas ecuaciones frente a una transformación de Lorentz. Por simplificar, tomemos un sistema S' móvil a lo largo de x; valen las transformaciónes simples (pág. y resultan

$$\frac{\partial}{\partial x'}=\beta_{v_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{v_0}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right), \qquad \vec{v}'=\frac{\beta_{v_0}\beta_v}{\beta_{v'}}\left(\vec{v}-\vec{v}_0\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y'}=\frac{\partial}{\partial y} \qquad \frac{\partial}{\partial z'}=\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'}=\beta_{v_0}\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_0\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

Escribiendo ahora las ecuaciones 1.1 á 2.3 en el sistema S', y transformando las coordenadas, se encuentra mediante cáculos directos, que basta imponer a nuestras magnitudes las leyes de transformación

$$\rho'=\rho\frac{\beta_{v'}}{\beta_v} \qquad 2.4$$

$$\begin{cases} \mathcal{E}'_x=\mathcal{E}_x\\ \mathcal{E}'_y=\beta\left(\mathcal{E}_y-\frac{v_0}{c}H_z\right)\\ \mathcal{E}'_z=\beta\left(\mathcal{E}_z+\frac{v_0}{c}H_y\right)\end{cases} \qquad \begin{cases} H'_x=H_x\\ H'_y=\beta_{v_0}\left(H_y+\frac{v_0}{c}\mathcal{E}_z\right)\\ H'_z=\beta_{v_0}\left(H_z-\frac{v_0}{c}\mathcal{E}_y\right)\end{cases}$$

para asegurar la covariancia de las fórmulas.

La ley de variación de ρ muestra que la carga total en un cierto volumen es un invariante: $q=\rho\cdot\Delta V=\rho'\cdot\Delta V'$

En cuanto a la densidad de materia, nos hallamos con que debemos admitir también la constancia de la masa contenida en un volumen dado; esto no tiene sentido mas que si convenimos en que ρ puede significar solamente densidad de masa en reposo. Con esta convención, que en nada altera las leyes conocidas para las masas en reposo o con pequeña velocidad, nuestras ecuaciones continúan siendo comunes a la gravitación y la electricidad.

Finalmente , de las mismas condiciones de covariancia resulta la ecuación

$$\mathrm{rot}\,\vec{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad 2.5$$

Este conjunto de ecuaciones completa el sistema de Maxwell-Lorentz de la electrodinámica ordinaria. Históricamente es anterior a la cinemática de Einstein, de modo que el camino histórico es postular el conjunto de ecuaciones para un determinado sistema de referencia, y demostrar entonces su covariancia mediante las leyes de transformación de $\vec{\mathcal{E}}$ y $\vec{\mathcal{H}}$ antes encontradas.

Mostraremos ahora que estos vectores pueden obtenerse a partir de potenciales. Comenzamos por definir un vector potencial $\vec{A}$ tal que

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \vec{\mathcal{H}} \qquad 2.6$$

y llevando a la ecuación 2.5 obtenemos $\mathrm{rot}\left(\vec{\mathcal{E}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$, de modo que la expresión entre paréntesis debe ser obtenible a partir de un potencial escalar, que escribimos φ. Luego

$$\vec{\mathcal{E}} = -\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad 2.7$$

Tanto este φ como el $\vec{A}$ anterior están indefinidos todavía, pero se los puede hacer unívocamente determinados mediante la condición supletoria

$$\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \qquad 2.8$$

mediante la cual encontramos , con solo operar, las ecuaciones diferenciales a que deben satisfacer nuestros potenciales:

$$\begin{cases} \Box \varphi = -4\pi\rho \\ \Box \vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\rho\vec{v} \end{cases} \qquad 2.9$$

Nos interesa en especial el caso de cargas - o masas en reposo - puntuales. Las ecuaciones toman el aspecto

$$\begin{cases} \Box \varphi = -4\pi q\, \delta(\vec{r}-\vec{v}t) \\ \Box \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} q\, \delta(\vec{r}-\vec{v}t)\, \vec{v} \end{cases} \qquad 2.10$$

donde δ es la función de Dirac.

La solución para este caso fué obtenida primitivamente por Liénard y Wiechert. Si el punto potenciante se mueve con velocidad variable, el resultado se obtiene en forma de serie ; en lo que sigue nos restringiremos a velocidades constantes, para las cuales es posible obtener un desarrollo cerrado de las magnitudes. El cálculo - largo y falto de interés aquí - conduce para la única magnitud que nos interesa, $\vec{\mathcal{E}}$, al valor (con $\vec{F} = q\vec{\mathcal{E}}$)

$$\vec{F}_1 = -\frac{q_1 q_2}{r^3} \frac{1 - v_2^2/c^2}{\left[1 - \frac{v_2^2 - (\vec{v}_2\cdot\vec{r}/r)^2}{c^2}\right]^{3/2}} \vec{r} \qquad 2.11$$

Esta es pues la fuerza que la carga q_1 (o la masa en reposo q_1) recibe por efecto de la carga q_2 (o la masa en reposo q_2), móvil respecto a ella con velocidad constante $\vec{v}_2$. La fuerza está medida en el sistema de la partícula pasiva q_1 .

De este modo, la relatividad nos ha permitido pasar , de la ecuación de la fuerza entre partículas en reposo, $\vec{F}_1 = -\frac{q_1 q_2}{r^2}$, con la que comenzamos este capítulo, a la expresión que toma en cuenta el movimiento de la partícula actuante, 2.11.

En cuanto al movimiento de la partícula pasiva q_1 , es innecesario considerarlo en especial. Pues en todos los casos que nos interesen, en que q_1 se halle en movimiento , con velocidad uniforme, una transformación de coordenadas,tiempo, y fuerza, nos permitirá hallar la fuerza que ella sufra, tal como sería medida desde cualquier otro sistema - inercial- de referencia. --

3.-Consecuencias de las ecuaciones. Fuerza ejercida sobre una partícula.

En los dos párrafos anteriores hemos escrito las ecuaciones habituales del electromagnetismo de Maxwell-Hertz-Lorentz y las leyes de transformación de sus magnitudes fundamentales en la forma introducida por Einstein.

La forma en que hemos introducido sus postulados fundamentales muestra que ellos y sus consecuencias son igualmente convenientes para los fenómenos eléctricos y los gravitatorios, de modo que debemos prepararnos para hallar entre dos masas en movimiento, el mismo conjunto de fenómenos que entre dos cargas móviles. Esto no significa identificación alguna entre las "causas" de la gravedad y de la electricidad; como dijimos antes, es mera consecuencia de que las dos primeras ecuaciones, fundamentales, sean comunes (1 1 y 1 ,) y de que la cinemática relativista nos fuerce a asignar igual velodad al agente físico responsable de una "acción a distancia" cualquiera.

Nos proponemos en lo que sigue mostrar, con algunos ejemplos, el tipo de fenómenos existentes entre cargas y la forma de describirlos. No nos ocuparemos mas que de movimientos uniformes.

En cuanto a la aplicación a la gravitación, nos limitaremos a observar que la existencia de fuerzas de inducción entre masas en movimiento, demasiado débiles para tener trascendencia experimental, es un bien conocido resultado del otro camino posible para el estudio de la gravitación (la relatividad general), estudiado por Thirring y Lense en 1918 (Phys. Zs.19,p.156;1918). La fuerza que se ejerce sobre una partícula en reposo, por otra móvil, resulta exactamente nuestra ecuación 2,7 . Un resumen de este problema puede consultarse en A.Einstein, "El significado de la Relatividad", p.127 y 128 . Los caminos que hemos llamado a) y b) en pág.120 son por lo tanto equivalentes.(1)

(1) Nota en pág 161.

En lo que sigue nos concretaremos a electrodinámica.

Las cargas eléctricas de que nos ocuparemos serán puntuales, de modo que para no introducir hipótesis sobre el significado de ρ en este caso, emplearemos elvalor total de la carga, y la fuerza total que sobre ella actúa (Ec. 2,11). Las aplicaciones serán macroscópicas, de modo que nos despreocuparemos de los valores de las fuerzas en las inmediaciones de las cargas, donde tienden a infinito.

El valor numérico de las cargas elementales que se conocen es tal, que podemos ocuparnos de las acciones eléctricas entre ellas sin tomar en consideración las acciones gravitatorias que contemporáneamente se ejerzan ; dos masas de agua de un gramo cada una, situadas por ejemplo a un metro de distancia, se atraen con una fuerza de 10^{-12} dinas, pero si pudiéramos reunir toda la electricidad de un signo en una de las masas, y la de signo contrario en la otra, la atracción eléctrica entre ambas sería superior a 10^{14} toneladas. Entre dos electrones, situados en reposo a una cierta distancia dada, uno de otro, las fuerzas eléctricas son 10^{43} veces mayores que las gravitatorias.

Nos proponemos mostrar que las fuerzas que se ejercen entre conductores recorridos por corrientes eléctricas constantes, son debidas a variación relativista en los valores de las fuerzas que entre sí se ejercen las cargas que componen la materia; esta variación se origina debido al movimiento de unas cargas con respecto a las otras.

Si se tienen en cuenta los elevados valores de las fuerzas eléctricas puestas en juego, no ha de sorprender que una pequeña alteración porcentual en esas fuerzas (del orden de 10^{-24} del valor total) alcance sin embargo para provocar fenómenos tan macroscópicos como el accionamiento de un motor indutrial .

El tratamiento usual ~~empírico~~ de los fenómenos llamados "electromagnéticos" consiste en el manejo de los vectores $\vec{E}$ y $\vec{H}$. Considerando que la materia tiene composición eléctrica puramente, y que al vector $\vec{H}$ no corresponde ninguna definición similar a la de "fuerza por unidad de carga"que hemos empleado para el $\vec{E}$, pues no hay sustancia alguna que genere dicho campo (div $\vec{H} = 0$), preferimos en lo sucesivo atenernos a la <u>fuerza eléctrica en forma exclusiva</u>.

4.- <u>Puntos de vista adoptados en el presente trabajo</u>.

Llamamos fuerza eléctrica, por definición, a la que se ejerce sobre una carga eléctrica en reposo. Esta fuerza eléctrica sólo puede provenir - también por definición - de la acción de otras cargas eléctricas situadas en las inmediaciones de la carga pasiva.

Para el caso de una única carga activa q_2 actuando sobre una carga en reposo q_1, la fuerza está dada por la ec. 2.11, y depende ligeramente (e.d., en términos del orden v^2/c^2) del movimiento de q_2. No consideraremos otro movimiento que el recto y uniforme.

Trataremos a todas las cargas como puntuales. La ec. 2.11 puede considerarse como consecuencia directa de las ec. 2.10, de modo que basta adoptar estás últimas como postulados para tener todo el formalismo, <u>sin</u> emplear las ec. 1.1 hasta 2.5 .

Para obtener la acción de un conjunto de cargas sobre una de ellas (por ejemplo, una nube o "cluster" de electrones) habrá que sumar expresiones del tipo de $\vec{F}_1$, cuidando de computar las posiciones de todas las cargas actuantes que q_1 juzgue como simultáneas desde su propio sistema.

Cuando se requiera la fuerza actuante sobre una partícula, desde un sistema en que ésta no se halle en reposo, será necesario transformar la expresión de $\vec{F}$ mediante las correspondientes ecuaciones , pág.

(En la electrodinámica relativista de Minkowski, se prefiere en cambio el uso de los vectores $\vec{E}$ y $\vec{H}$, equivalente en principio, como acabamos de demostrar).

Puesto que la materia consiste únicamente en cargas eléctricas, nos parece mas apropiado el empleo exclusivo de fuerzas eléctricas actuando sobre ellas; para ello en cada caso adoptaremos un sistema de referencia en que la partícula que queremos estudiar se encuentre en reposo.

En las sustancias aisladoras, admitimos que las cargas eléctricas que las forman se encuentran ocupando posiciones fijas - salvo por los movimientos térmicos, que no estudiaremos . La aplicación de una fuerza eléctrica exterior puede producir un desplazamiento de cargas, de manera elástica.

En las sustancias conductoras, admitimos que un cierto número de cargas negativas, electrones, se encuentra prácticamente libre de moverse entre la malla positiva que compone el conductor. El movimiento de esta nube de electrones tiene lugar cuando se aplica exteriormente una fuerza eléctrica al conductor. Admitimos que para conductores comunes, la velocidad con que los electrones se mueven en su interior es constante, debido a la existencia de un rozamiento viscoso (ley de Ohm) entre electrones y malla.—

El número de electrones libres depende de la sustancia; aunque desaparecerá siempre de nuestros resultados finales, haremos aquí algunos estimados numéricos que fijen el orden de magnitud de las magnitudes que intervienen:

Admitiendo un electrón libre por átomo, en el cobre hay unos 10^{23} electrones libres por centímetro cúbico. Su carga negativa es aprox. 10^4 Coulombs/cm^3. La carga negativa total del cobre, incluyendo electrones orbitales, es unas 29 veces mayor.

Cuando se coloca un alambre de cobre de 1 mm de diámetro y 10 metros de largo entre dos terminales en los que haya 1 volt de dif. de pot., (supondremos campo eléctrico homogéneo, para simplificar), cada centímetro lineal del conductor se vé sometido a una fuerza eléctrica del orden de ~~[illegible]~~ unos 10 Kgr, aplicada tanto a los electrones libres como a la malla positiva.

Esta fuerza eléctrica no produce la menor tensión mecánica en el material; se manifiesta solamente en la aparición de una corriente eléctrica del orden de 5 amperes en el alambre. Los electrones la forman desplazándose a lo largo del conductor con una velocidad media, constante, del orden de medio milímetro por cada segundo.

El roce viscoso (proporcional a la velocidad) entre los electrones y la malla, es una fuerza del orden de 10 kgr por cada centímetro lineal del alambre; se manifiesta en el hecho de que el material no adquiere tensiones, y en que se disipa potencia (unos 5 watts en todo el alambre).

No necesitaremos entrar en mayores detalles sobre la estructura de los conductores. En particular, la trayectoria individual de cada electrón dentro del material queda fuera de nuestras consideraciones, lo mismo que la pregunta de si los electrones se mueven de manera homogénea en toda la sección del conductor o si existe un efecto pelicular.

Deseamos, en todo el trabajo, que el énfasis caiga sobre un mismo aspecto de la cuestión , a saber: que todo el desarrollo histórico de la electrodinámica no ha sido sino el estudio experimental de conductores metálicos filiformes, poseyendo igualdad de cargas positivas y negativas (conductores "neutros") pero en los que la pequeña velocidad de las cargas negativas era suficiente para provocar efectos eléctricos relativistas (del orden $(v/c)^2$) en las cargas eléctricas - o conductores metálicos - situados en las inmediaciones.-

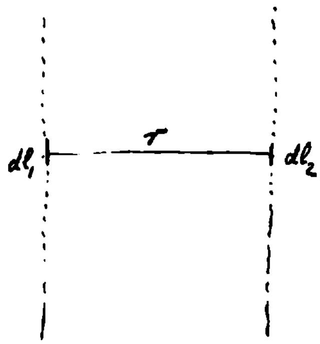
5 Ejemplo: Corrientes paralelas

Tengamos dos trozos de conductor metálico, paralelos, enfrentados, y a distancia r que supondremos grande frente al tamaño de los trozos, dl_1 y dl_2. En cada conductor habrá N cargas eléctricas positivas por centímetro cúbico, de modo que la carga eléctrica positiva de cada trozo valga, respect., $N\, s_1\, e\, dl_1$, $N\, s_2\, e\, dl_2$, llamando e a cada carga positiva, y s a la sección del conductor. Cada carga positiva está formada en realidad por un núcleo atómico y una coraza electrónica incompleta, a la que falta el electrón de condución. Todos estos detalles son aquí inesenciales, como también lo es el valor de N , que deberá desaparecer del resultado.

Por cada carga positiva hay una negativa, de modo que el conjunto resulte metal neutro . El movimiento de los electrones no altera este hecho, de modo que la carga negativa en los trozos vale también $N\, s_1\, e\, dl_1$ y $N\, s_2\, e\, dl_2$, ya se consideren desde el metal en réposo, o desde el sistema en que los electrones se encuentran en promedio en reposo.

Considerado por separado, el número de cargas por centímetro cúbico varía según el sistema de referencia adoptado. Así, la densidad de electrones debe aparecer un poco aumentada por hallarse en movimiento respecto al metal. Pero, correspondientemente la longitud total de la nube electrónica que se desplaza aparecerá, por igual razón, acortada en la dirección del movimiento. El producto $N\, s\, dl$, que representa un número entero, es un invariante. Y como también lo es la carga de un electrón, e , volvemos a la afirmación anterior sobre la invariancia de la carga total en cada trozo.

Calculemos ahora el efecto eléctrico de un conductor sobre el otro, en primera aproximación para tener noción del origen del fenómeno.



Comenzamos por cargas positivas del conductor de la derecha, que se encuentran en reposo. Sobre cada una de ella actúan, ante todo, las cargas positivas del otro conductor, con una fuerza de repulsión

$$F_1 = + \frac{N e^2 s_1 \, dl_1}{r^2}$$

Además, actúan las cargas negativas del conductor izquierdo, móviles con velocidad media v_1. La fuerza eléctrica que provocan aparece, en la componente transversal al movimiento que aquí nos interesa, multiplicada por el factor relativista , de modo que la atracción será

$$\left(\beta_1 = \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{-1/2}\right) \qquad F_2 = -\beta_1 \frac{N e^2 s_1 \, dl_1}{r^2}$$

Sumando estas fuerzas, que son simultáneas y están referidas al mismo sistema, obtenemos la fuerza total que actúa sobre el metal en reposo, en su parte positiva. Considerando la pequeñez de v_1, para esta primera aproximación desarrollamos β_1 en serie de potencias, y nos limitamos a dos términos. Obtenemos

$$F^+ = - \frac{N e^2 s_1 \, dl_1}{r^2} \cdot \frac{2 v_1^2}{c^2},$$

lo que indica que cada carga eléctrica positiva en reposo es atraída por el conductor neutro, por el mero hecho de existir una corriente eléctrica en su interior. Un conductor metálico se comporta, al estar recorrido por una corriente, como si poseyera una carga eléctrica -ficticia -, negativa.

El valor de la fuerza que de este modo resulta es suficientemente chico para que no pueda revelarse por ninguna experiencia directa, ni de tipo electrostático ni de tipo electrolítico, como lo muestra una simple verificación del orden de magnitud. Los conductores están rodeados de un campo eléctrico, pero demasiado débil para las posibilidades actuales de observación. De no ser así, un conductor con corriente continua induciría otra corriente continua en los conductores próximos.

Continuemos con la acción del conductor de la izquierda sobre el de la derecha. Elijamos ahora como sistema de referencia uno en que los electrones de la derecha estén en reposo (en promedio); vale decir, un sistema de referencia móvil con velocidad v_2.

Desde este sistema, la acción del conductor izquierdo sobre los electrones se describirá así:

Las cargas positivas izquierdas se mueven - respecto al sistema adoptado, con velocidad $-v_2$; por lo tanto

$$F_3' = -\beta_2 \frac{Ne^2 s_1 dl_1}{r^2} \qquad , \beta_2 \simeq 1 + \frac{v_2^2}{2c^2} \; ,$$

es la fuerza con que actúan sobre cada electrón, fuerza medida en el sistema móvil.

Finalmente, las cargas negativas de la izquierda aparecen con una velocidad relativa que vale $v_1 - v_2$ (a menos de términos de segundo orden en $1/c$), y la fuerza que producen sobre cada electrón será

$$F_4' = +\beta_r \frac{Ne^2 s_1 dl_1}{r^2}$$

donde

$$\beta_r = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(v_1 - v_2)^2}{c^2}}} \simeq 1 + \frac{(v_1 - v_2)^2}{2c^2} \; .$$

Sumando $F_3' + F_4'$ obtendremos la acción total sobre cada electrón, juzgada desde su propio sistema. Es

$$F'^- = \frac{Ne^2 s_1 dl_1}{r^2} \frac{(v^2 - 2v_1 v_2)}{2c^2} \; .$$

Los observadores en reposo con respecto al metal podrán notar la existencia de esta fuerza eléctrica sobre los electrones, que ellos ven móviles. El valor de la fuerza, medida por ellos resultará levemente menor, según la ley relativista de transformación de fuerzas.

Como el factor es prácticamente uno (a menos de términos del orden 10^{-24}, a lo sumo), podemos escribir, dentro de la precisión con que estamos calculando, $F'^- = F^-$, y solo nos queda por sumar $F^+ + F^-$.

El resultado es

$$F = F^+ + F^- = -\frac{Ne^2 s_1 dl_1}{r^2} \frac{v_1 v_2}{c^2} \; .$$

Para tener la fuerza total sobre el elemento dl_2, multiplicamos por $N s_2 dl_2$, número de cargas del conductor de la derecha.

Introduciendo en seguida la abreviatura $i = N e v s$, obtenemos

$$F = -\frac{i_1 i_2\, dl_1\, dl_2}{c^2 r^2}$$

la ley de Ampère. El signo menos indica atracción, y proviene de haber tomado velocidades v_1 y v_2 en el mismo sentido.(4)

El cálculo anterior es aproximado; no hemos tomado en cuenta el valor de r para los observadores en movimiento, ni la acción de elementos de conductor no enfrentados,etc. El cálculo exacto , y para elementos de conductor en cualquier orientación, está en el   . Aquí nos limitamos a mostrar el origen relativista de los fenómenos hallados por Ampere en 1822 entre corrientes continuas. A primera vista parece sorprendente que una corrección relativista en el valor de la fuerza eléctrica, para velocidades tan bajas como son las de los electrones en un conductor (en promedio), pueda dar lugar a efectos macroscópicos.La sorpresa desaparece si uno recuerda que la carga eléctrica negativa contenida en un centímetro cúbico de cobre es del orden de 10^4 Coulombs; y otro tanto la positiva.-

Con los mismos recursos de este ejemplo podemos tratar el caso de elementos de conductor <u>alineados</u> . Como la componente

dl_1 — — — r — — — dl_2

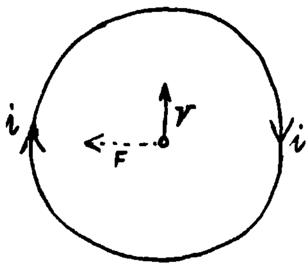
de las fuerzas en la dirección del movimiento no se transforma, llegamos de inmediato a que elementos según la misma recta no se ejercen acción ponderomotriz, puesto que la fuerza sobre los electrones es igual y contraria a la fuerza sobre el metal positivo.

Pero en este segundo caso hemos introducido una hipótesis, a saber: que la fuerza aplicada a los electrones, libres y móviles, se puede equilibrar con la fuerza contraria aplicada al metal positivo. Esto equivale a suponer que a pesar de su movilidad, existe una vinculación mecánica entre los electrones y el metal al que pertenecen. Como por otra parte ese vínculo no impide que los electrones se desplacen por mas pequeña que sea la fuerza electromotriz aplicada al metal , se concluye que debe tratarse de una especie de roce, y por cierto de tipo viscoso exclusivamente: los electrones se mueven en los cables como municiones dentro de un tubo lleno de aceite. Si hubiera un "coeficiente de roce", independiente de la velocidad, habría también una diferencia de potencial mínima para producir una corriente.

Este rozamiento viscoso, es lo que llamamos resistencia óhmica del conductor. Vemos que la relatividad junto con la teoría electrónica hacen jugar un importante papel a la resistencia óhmica en las fuerzas ponderomotrices entre conductores. <u>Un superconductor, en el que la resistencia óhmica es prácticamente nula, debe seguir una diferente ley ponderomotriz.</u>(3)

6. Aplicación a la electrotécnica

El resultado del ejemplo anterior para conductores metálicos ordinarios, permite sin mas enunciar prácticas reglas sobre el comportamiento de un electrón o de un conductor situado en las proximidades de un arrollamiento por el que circule corriente continua.

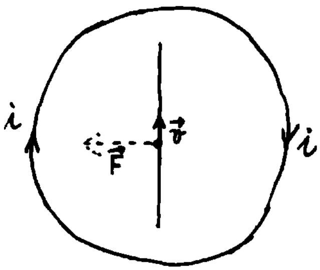


a) desviación de un electrón libre en las proximidades de una bobina ("Sentido de la fuerza de Lorentz").

En el esquema tenemos una espira conductora, por la que circula una corriente continua de electrones en sentido horario.

Un electrón libre, que avanza con velocidad V en el espacio vacío del interior de la espira, sufre la repulsión de todos los electrones que los rodean, y la atracción del metal positivo. Esta última es nula por razones de simetría,(pues la fuerza que se ejerce sobre una carga en movimiento uniforme es la misma que si ella estuviera en reposo, ver pág 147, 8-1), y queda solamente la fuerza ejercida por los electrones móviles en el conductor que forma la bobina, fuerza que también por simetría es equivalente a la que harían dos elementos de conductor paralelos, dl_1 y dl_2, situados a uno y otro lado del electrón móvil, y a una distancia convenientemente calculada.

Los electrones en el elemento,que se muevan en sentido contrario a V tendrán mayor velocidad relativa respecto al electrón central, y en consecuencia lo repelerán con mayor intensidad. El electrón central desviará a su izquierda , alejándose de los electrones que juzga mas veloces.

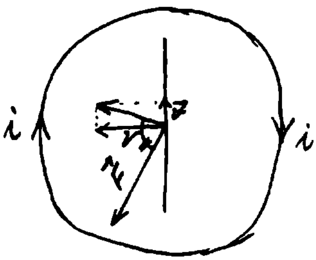


b) Principio del motor eléctrico

En la proximidad de la misma bobina anterior (que ahora será el "estator") hemos puesto un conductor recto, por el que mediante pilas hacemos circular electrones hacia arriba, con velocidad media $\vec{v}$ (este conductor forma parte de otro bobina, apropiadamente dispuesta sobre el "rotor" de la máquina).

Los electrones del conductor recto sufren una fuerza hacia la izquierda, pues tratan de alejarse de las cargas homónimas que juzgan mas veloces. Tenemos así una fuerza sobre el conductor mismo, pues sus electrones no pueden escaparse de él transversalmente, y sobre el rotor actúa por lo tanto una "cupla de arranque", tanto mayor cuanta mayor sea la intensidad en todos los cables.

Si la cupla resistente aplicada al eje del rotor es menor que la cupla de arranque, el motor se moverá. Supongamos que alcanzó una velocidad de rotación tal, que el conductor con que representamos al rotor tenga una velocidad $\vec{V}$ hacia la izquierda (será la velocidad tangencial del rotor).



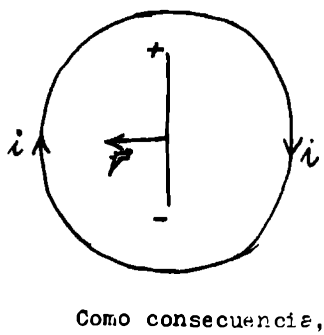
Los electrones del rotor se mueven ahora, con respecto a la bobina fija, con la velocidad $\vec{v}+\vec{V}$. La fuerza de Lorentz, que según el caso anterior resulta siempre a 90° del movimiento del electrón que la sufre, estará ahora dirigida en una dirección oblicua respecto al alambre.

Si llamamos $\vec{F}$ a la fuerza de Lorentz, el producto $\vec{F}.\vec{V}$ medirá la potencia mecánica que desarrolla el electrón que la sufre, pues $\vec{V}$ es la velocidad que utilizamos mecánicamente. De igual modo, $\vec{F}.\vec{v}$ mide la potencia eléctrica necesaria para hacer circular al electrón por el rotor. La componente de $\vec{F}$ a lo largo del conductor es forzosamente en sentido contrario al de $\vec{v}$, de modo que $\vec{F}.\vec{v}$ es negativo siempre, y las pilas deben proveer esta energía . El efecto final es como si el rotor hubiera disminuido la intensidad que por él circula ("reacción del inducido"). En ausencia de pérdidas, como estamos suponiendo, no hay otras potencias a tomar en cuenta, y la suma $\vec{F}.\vec{V}+\vec{F}.\vec{v} = \vec{F}.(\vec{V}+\vec{v}) = 0$. La fuerza de Lorentz no ejerce potencia en ningún caso; su papel se limita a hacer que la potencia eléctrica que se toma de las pilas que alimentan el rotor, se transforme en potencia mecánica <u>en el mismo rotor</u>.

Cuanta menor sea la intensidad en la bobina del estator, mayor deberá ser la velocidad V para una cierta potencia eléctrica ("al disminuir la excitación aumenta la velocidad"). Si el motor gira sin cupla resistente (" en vacío") su velocidad aumentará hasta que la fuerza de Lorentz resulte casi paralela al conductor recto, dejando una pequeña componente normal para compensar las pérdidas mecánicas.

Las frases entre comillas corresponden al lenguaje electrotécnico habitual, para motor de corriente continua, excitación independiente.

Desde el punto de vista físico . lo mas importante es que la bobina "inductora" no figura para nada en el balance energético, pues no transfiere energía al eje. Es debido a ello que se la puede reemplazar por un imán permanente, que no es sino una bobina con corriente continua(en este caso).



c) <u>generador</u>

La instalación en el esquema es como en el ejemplo anterior, pero ahora suponemos que el alambre recto es movido, mecánicamente, manteniéndole una velocidad $\vec{V}$.

Como consecuencia, sus electrones <u>se alejan de los que juzgan</u>

mas veloces, y pasan a dar polaridad negativa el extremo inferior (fuerza electromotriz "inducida en el generador en vacío").

Si conectamos ambos extremos del alambre móvil entre sí - interponiendo una conveniente resistencia óhmica ("generador con carga") tendremos que sumar, como antes, la velocidad media de los electrones con la velocidad de arrastre del conductor. La resultante será oblicua respecto al conductor, y oblicua también la fuerza de Lorentz, a 90° de ella. Como antes, debemos descomponer la fuerza en dos direcciones, obtenemos que es necesario ahora entregar una potencia mecánica al rotor para que luego se transforme en potencia eléctrica, etc. Se reproduce sin mayor novedad el caso anterior.--

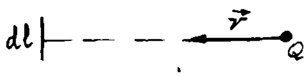
Obsérvese que en todos los casos hemos aplicado la misma regla para determinar los detalles: las cargas móviles se alejan, de entre todas las cargas homónimas que las rodean, de aquellas que juzgan mas veloces.

Esta forma concisa suplanta a las múltiples reglas mnemotécnicas "de los tres dedos", de "la mano derecha", de "la mano izquierda", del "nadador de Ampére", del "tirabuzón de Maxwell", etc.; pero no es a su vez una regla mnemotécnica, sino un resultado fácilmente deductible recordando que la fuerza producida por una carga en movimiento se ve transversalmente un poco mayor, y que por simetría todos los casos pueden reducirse al caso de elementos paralelos. La justificación cuantitativa tampoco ofrecería la menor dificultad, una vez en posesión de la fórmula completa para conductores en cualquier dirección (pág. ~~147~~ 150).

7. Carga móvil en la vecindad de un conductor

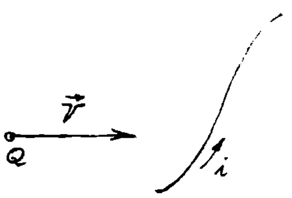
El ejemplo de la atracción entre corrientes paralelas nos ha mostrado que un conductor metálico recorrido por una corriente, es capaz de ejercer fuerzas eléctricas, (a pesar de ser neutro en el sentido de que contiene iguales cargas de signos contrarios) y hemos podido hallar el sentido de la fuerza desviatriz de Lorentz cuando era ejercida por un elemento de conductor paralelo al movimiento de una carga libre.

La simplicidad de ese caso permite obtener consecuencias rápidas en algunas aplicaciones, pero es impotente para resolver el siguiente problema:

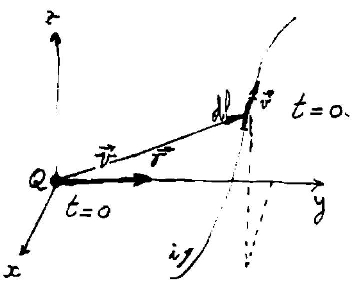


Sea un elemento de conductor dl, y a una cierta distancia de él avance una carga eléctrica Q sobre la recta normal al punto medio del conductor. Por razones de simetría, la acción del conductor sobre el cuerpo cargado debe aparentemente estar contenida en la normal a su punto medio, y no se descubre cuál pueda ser el origen de la fuerza de Lorentz, la que, según sabemos experimentalmente, continúa siendo a 90° del movimiento de la carga libre.

La respuesta a esta cuestión supone plantear problemas de simultaneidad que no habían aparecido en el caso de corrientes paralelas, y es en cambio independiente de la modificación relativista de la fuerza eléctrica, que era dominante allí.



Tengamos un conductor filiforme rígido dispuesto en forma arbitraria, y recorrido por una corriente constante i (cuyo sentido hacemos coincidir con el de avance de los electrones dentro del cable). Suponemos en el vacío al conductor, y hacemos que una carga eléctrica puntual se mueva, a distancia grande comparada con el diámetro del conductor, con velocidad $\vec{v}$ respecto a él. En el instante $t = 0$ la carga se encuentra precisamente en el origen de coordenadas del sistema S con respecto al cual el conductor está inmóvil. Deseamos calcular la fuerza eléctrica que se ejerce sobre la carga situada en O, y en ese instante.



Desde luego que no hay pérdida alguna de generalidad en considerar la carga en el origen de coordenadas y precisamente en el instante $t = 0$; podemos pasar a cualquier otra posición inicial mediante una transformación de ejes sin consecuencias. Pero en cambio, es importante remarcar que las observaciones que siguen tienen sentido solamente cuando la distancia entre conductor y carga sea suficientemente grande como para considerar al primero sin sección apreciable y despreocuparnos de la distribución de cargas en su interior.

Tomemos un elemento <u>dl</u> , y sean q y $-q$ las cargas contenidas en él; la carga $-q$, constituída por electrones, se mueve con velocidad media $\vec{v}$ y forma la corriente. Suponemos las cargas puntuales para abreviar, y en el "mismo" sitio, de modo que el vector $\vec{r}$ señala a la vez la posición de ambas.

Para obtener la acción total sobre la carga móvil, Q, deberemos calcular separadamente la acción de q y de $-q$, y <u>sumar</u> luego para hallar el efecto. Pero, siendo variables las posiciones, deberemos sumar las fuerzas eléctricas que <u>simultáneamente</u> obren sobre la carga móvil.

Y está claro que esta simultaneidad debe ser juzgada desde el sistema propio de la carga móvil que sufre la fuerza.

La diferencia en los tiempos propios de las cargas positivas y negativas del conductor, debida a la velocidad de alrededor de 10^{-2} c/s de que están animados - en media- sus electrones, es por cierto un valor numéricamente muy pequeño. Veremos sin embargo que es esa diferencia de tiempos la que hace que el conductor ejerza sobre las cargas exteriores en movimiento, la fuerza <u>transversal</u> de Lorentz.

Seguiremos para probarlo el siguiente esquema de cálculo:

a) hallar las trayectorias de las cargas del donductor, respecto al punto móvil. Basta para ello elegir un sistema de referencia en que la carga libre esté en reposo, y aplicar transformaciones de Lorentz-Einstein.

b) hallar la fuerza eléctrica que las cargas del conductor producen en la carga libre, en un cierto instante t' del tiempo propio de la carga libre.

c) calcular la fuerza total que dicha carga sufre, y retransformar esta fuerza al sistema de referencia en que el conductor está en reposo.

Como sistema de referencia móvil S' adoptamos uno que tenga ejes paralelos a los del sistema S, con los ejes <u>x</u> coincidentes, y coincidentes por lo tanto con la dirección de V, y con su origen O' superpuesto con O en el instante $t = t' = 0$. De este modo podremos tratar el problema en tres dimensiones, sin demasiada complejidad algebraica y sin perder generalidad.

Supondremos la carga móvil sujeta al punto O' mediante un resorte, que servirá de dinamómetro é impedirá a la vez que la carga varíe su velocidad por efecto de las fuerzas. De esta manera todas las velocidades son vectores <u>constantes</u>, y podemos usar la cinemática y mecánica relativista sin dificultad.

Para las cargas que componen el conductor tenemos en el sistema S, indicando p las positivas y n las negativas:

Vector posición: $\vec{r}_p = \vec{r}$ $\qquad$ $\vec{r}_n = \vec{r} + \vec{v}\,t$ $\qquad$ 7,1

Vector velocidad: $\vec{v}_p = 0$ $\qquad$ $\vec{v}_n = \vec{v}$

Mientras en el sistema S' encontramos (con 3.1 y (3.3)) respectivamente:

$$\text{Posición}\begin{cases} \vec{r}\,'_p = \vec{r} - \vec{V}\left\{\dfrac{\vec{r}.\vec{V}}{V^2}(1-\beta_V) + \beta_V\, t\right\} \\[2ex] \vec{r}\,'_n = \vec{r} + \vec{v}\,t - \vec{V}\left\{\dfrac{\vec{r}.\vec{V}}{V^2}(1-\beta_V) + \beta_V\, t\right\} - \vec{V}\left\{\dfrac{\vec{v}.\vec{V}}{V^2}(1-\beta_V)\right\} t \end{cases} \qquad 7,2$$

$$\text{Velocidad}\begin{cases} \vec{v}\,'_p = -\vec{V} \\[2ex] \vec{v}\,'_n = \dfrac{\vec{v}/\beta_V - \left\{\dfrac{\vec{v}.\vec{V}}{V^2}\left(\dfrac{1}{\beta_V} - 1\right) + 1\right\}\vec{V}}{1 - \dfrac{\vec{v}.\vec{V}}{c^2}} \end{cases} \qquad 7,3$$

donde

$$\beta_V = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

Queremos calcular la fuerza actuante sobre la carga móvil, en el instante $t' = 0$. El tiempo en el sistema S' está dado por

$$t' = \beta_V\left(t - \frac{\vec{V}.\vec{r}}{c^2}\right) \qquad 7,4$$

de modo que los únicos relojes que coinciden son los situados en los orígenes O y O'. Los relojes del sistema fijo que están en el conductor, marcarán en cambio $t = \vec{V}.\vec{r}/c^2$, donde $\vec{r}$ es el vector posición de la carga que queramos considerar en cada caso. Con las 1 obtenemos

$$t_p = \frac{\vec{V}.\vec{r}}{c^2} \qquad\qquad t_n = \frac{\vec{V}.\vec{r}}{c^2}\,\frac{1}{1 - \dfrac{\vec{v}.\vec{V}}{c^2}} \qquad 7,5$$

como indicaciones de los relojes del sistema fijo que están, en el instante $t' = 0$, frente a las cargas positivas y negativas respectivamente. Reemplazando en 7,2 encontramos por fin las posiciones de las cargas en el instante que nos interesa. Para $t' = 0$ resultan (4)

$$\text{Posición}\begin{cases}\vec{r}'_p = \vec{r} + \vec{V}\,\dfrac{\vec{r}\cdot\vec{V}}{V^2}\left(\dfrac{1}{\beta_V}-1\right)\\[2ex] \vec{r}'_n = \vec{r} + \left[\dfrac{\vec{V}}{V^2}\left(\dfrac{1}{\beta_V}-1\right)+\dfrac{\vec{v}}{c^2}\right]\dfrac{\vec{r}\cdot\vec{V}}{1-\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{V}}{c^2}}\end{cases} \qquad 7.6$$

Podemos interpretar las figuras de este párrafo como una fotografía instantánea, tomada en el momento $t = 0$, desde el sistema S. La posición de las cargas en el conductor es la que aparece allá; pero la acción que ejercen sobre la carga móvil en ese instante, no puede calcularse con esa posición; si en la fotografía apareciesen también relojes ligados a todas las cargas, veríamos que sus indicaciones (tiempo t') no concuerdan, y que por lo tanto esa configuración de cargas no ejerce acción simultánea sobre la carga móvil.

Una fotografía tomada desde el sistema S' en el instante $t' = 0$ daría precisamente las posiciones 7.6 de las cargas, y es con ellas que debe calcularse.

La fuerza eléctrica producida en el punto en que se encuentra la carga móvil se calcula, para el sistema propio de la carga pasiva, mediante la fórmula general de pág. 125, 2.11. Particularizamos esa fórmula para las cargas positivas y negativas del conductor, teniendo en cuenta para cada una de ellas los vectores posición y las velocidades, dados por 6.3; después de algunas transformaciones (5) se obtienen:

$$\text{Fuerzas}\begin{cases}\vec{F}'_p = -\beta_V\,\dfrac{qQ}{r^3}\left[\vec{r}+(\vec{r}\cdot\vec{V})\left(\dfrac{1}{\beta_V}-1\right)\dfrac{\vec{V}}{V^2}\right]\\[2ex] \vec{F}'_n = \dfrac{\beta_V}{\beta_v^2}\,\dfrac{qQ}{r^3}\,\dfrac{\vec{r}\left(1-\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{V}}{c^2}\right)+(\vec{r}\cdot\vec{V})\left[\dfrac{\vec{V}}{V^2}\left(\dfrac{1}{\beta_V}-1\right)+\dfrac{\vec{v}}{c^2}\right]}{\left[1-\dfrac{v^2-(\vec{r}\cdot\vec{v})^2/r^2}{c^2}\right]^{3/2}}\end{cases} \qquad 7.7$$

Debemos sumar estas expresiones, que son simultáneas, para obtener la fuerza total resultante. No es posible, dada su complejidad, obtener una expresión sencilla o de rápida interpretación en el caso general. Pero, como el valor (v/c) es del orden de 10^{-24}, es posible suprimirlo en el denominador de F'_n sin cometer error superior a ese orden en el resultado final. Los denominadores de ambas fórmulas son entonces iguales, y la suma total es inmediata, dando

$$\vec{F}'_T = \beta_r \frac{qQ}{r^3} \frac{1}{c^2} \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{r}) \qquad 7.8$$

Reconocemos enseguida la fuerza eléctrica transversal con respecto a la velocidad $\vec{v}$, que ha de desviar a la carga móvil Q (Fuerza de Lorentz). Pero la expresión anterior está todavía en el sistema S'; para pasar al sistema S es suficiente suprimir el factor β_r , pues hemos adoptado los ejes de coordenadas det tal manera que la fuerza eléctrica tuviera una sola componente, transversal al movimiento de S'.

Finalmente, introducimos mediante

$$q\vec{v} = i\,d\vec{l} \qquad 7.9$$

el "elemento de corriente" usual en función de la intensidad i y delvector dl , paralelo al vector v,velocidad de los electrones en el conductor y de módulo igual al elemento de arco dl, y se obtiene, como expresión de la fuerza eléctrica sobre la carga móvil, medida en el sistema en que elconductor está en reposo,

$$\vec{F}_T = \frac{qQ}{c} \vec{V} \times \frac{i\,d\vec{l} \times \vec{r}}{c\,r^2} \qquad 7.10$$

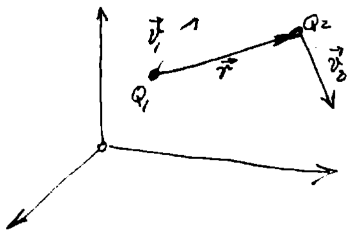
Resulta ahora claro que si para hallar esta fuerza en el instante t = 0 del sistema S hubiésemos empleado únicamente las posiciones de las cargas que el observador de ese sistema percibe como simultáneas, habríamos introducido un juicio arbitrario de simultáneidad y para llegar al mismo resultado final deberíamos haber introducido artificios ad-hoc.-

Es interesante que la expresión hallada por Lorentz sea solamente una aproximación desde nuestro punto de vista. Pero no parece haber posibilidad experimental de emplear la fórmula mas exacta, lo cual explica el éxito de la electrodinámica basada sobre dicha expresión.

8. Ley de fuerzas entre dos cargas puntuales y entre conductores

En los párrafos anteriores hemos calculado aproximadamente, para mostrar en detalle el origen de los fenómenos. Estableceremos aquí las fórmulas exactas.

Sean q_1 y q_2 dos cargas eléctricas que se mueven en el vacío con las velocidades constantes $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ respecto a un cierto sistema inercial S, y que en el instante t de dicho sistema ocupan los puntos Q_1 y Q_2, definiendo el vector aplicado $\vec{r} = Q_2 - Q_1$.



Sabemos que la acción que la carga q_2 ejerce sobre q_1 en "ese" instante, se halla comenzando por preguntarse cuál es la posición en que la carga q_2 se encuentra, juzgada desde la carga q_1, en el instante t' que indica el reloj de esta última en "ese" instante.

El detalle del cálculo figura en el párrafo anterior, y conduce de manera exacta a la expresión

$$\vec{F}'_1 = -\frac{\beta_{v_1}}{\beta_{v_2}^2} \frac{q_1 q_2}{r^3} \frac{\vec{r}\left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right) + (\vec{r}\cdot\vec{v}_1)\left[\frac{\vec{v}_1}{v_1^2}\left(\frac{1}{\beta_{v_1}} - 1\right) + \frac{\vec{v}_2}{c^2}\right]}{\left[1 - \frac{v^2 - (\vec{r}\cdot\vec{v}_2/r)^2}{c^2}\right]^{3/2}}$$

con $\beta_{v_i} = \left(1 - \frac{v_i^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ $(i = 1, 2)$

Para hallar la fuerza tal como sería observada desde el sistema S, escribimos $\vec{r}$ y $\vec{v}_2$ en la forma

$$\vec{r} \equiv \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}_1}{v_1^2}\vec{v}_1 + \left(\vec{r} - \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}_1}{v_1^2}\vec{v}\right)$$

$$\vec{v}_2 \equiv \frac{\vec{v}_2\cdot\vec{v}_1}{v_1^2}\vec{v}_1 + \left(\vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2\cdot\vec{v}_1}{v_1^2}\vec{v}\right)$$

poniendo así de manifiesto sus componentes según $\vec{v}_1$ y según la normal a $\vec{v}_1$.

Llevando a $\vec{F}'_1$ se obtiene

$$\vec{F}'_1 = -\frac{q_1 q_2}{r^3}\frac{1}{\beta_{v_2}^2}\frac{1}{[\ ]^{3/2}}\left\{\frac{\vec{r}\cdot\vec{v}_1}{v_1^2}\vec{v} + \left[\left(\vec{r} - \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}_1}{v_1^2}\vec{v}_1\right) + \frac{1}{c^2}\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{r})\right] / \beta_{v_1}\right\}$$

en la que hemos destacado nuevamente las componentes según $\vec{v}_1$ y según su normal, encerrando a esta última en un corchete.

$\vec{F}'_1$ está medida en el sistema en que q_1 está en reposo, sistema que es móvil respecto al S. La transformación a este sistema es inmediata, pues basta dejar intacta la componente según $\vec{v}_1$ y suprimir el factor β_{v_1} en la componente transversal el movimiento (p. 111 6.6).

Resulta de este modo

$$\vec{F}_1 = -\frac{q_1 q_2}{r^3} \frac{1 - v_2^2/c^2}{\left[1 - \frac{v_2^2 - (\vec{r}\cdot\vec{v}_2)^2/r^2}{c^2}\right]^{3/2}} \left[\vec{r} + \frac{1}{c^2}\, \vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{r})\right] \quad 8\,1$$

como expresión exacta de lo buscado, esto es, la fuerza eléctrica que desde el sistema S observaremos actuando sobre q_1 en el instante en que las posiciones relativas de las cargas sean en ese sistema q_1, q_2.

Se reconocen dos términos en la fuerza eléctrica: el de Coulomb, según la recta que une ambas cargas en ese instante, y el término de Lorentz, fuerza desviatriz que actúa siempre de través sobre la carga pasiva. El término de Lorentz es siempre menor en módulo que el de Coulomb.

Si bien es interesante el hecho de que exista una fuerza siempre transversal, no lo es menos la circunstancia de que dicha fuerza transversal se deba unas veces a variación relativista de las fuerzas con el movimiento (ejemplo de las corrientes paralelas) y otras veces a la falta de simultaneidad exclusivamente (ejemplo de la carga dirigida simétricamente hacia un conductor). Supongamos fijos $\vec{v}_2$ y $\vec{r}$, y $\vec{v}_1$ contenida en su mismo plano pero con dirección variable : cualquiera sea el azimut de $\vec{v}_1$ respecto a $\vec{r}$, la fuerza desviatriz es la misma en módulo, a pesar de que cuando $\vec{v}_1$ está orientada según $\vec{r}$ intervienen solamente relojes, y cuando lo está a 90° de $\vec{r}$ solamente ley de fuerzas.

En nuestra opinión, esto es un ejemplo más de que toda la relatividad se apoya sobre un único enunciado de trabajo, que es el de la falta de simultaneidad universal. Todas las consecuencias pueden referirse en forma directa a dicho enunciado. Recordemos (pág. 96) que a su vez, ese postulado es la expresión covariante de la hipótesis de existencia de los agentes físicos.

La discusión de la ley de fuerzas entre cargas puntuales plantea en seguida el problema de la influencia del medio dieléctrico interpuesto entre ambas. Pues por las experiencias de Faraday sabemos que el término de Coulomb es afectado por la constante dieléctrica, mientras el de Lorentz no.

Mostraremos aquí la respuesta relativista a este problema, para el caso en que el sistema S esté lleno de un medio material, de constante dieléctrica ε ,(que definiríamos en términos de desplazamiento eléctrico, a la manera de Maxwell) , y en el que la velocidad de propagación límite de los agentes físicos fuera $V \neq c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, donde μ es una constante también propia del medio.

Tanto la cinemática relativista como la fuerza eléctrica de Liénard-Wiechert, nuestras dos herramientas fundamentales, resultan influenciadas.

La fuerza eléctrica resulta dividida por ε , ($\vec{E} \to \frac{\vec{E}}{\varepsilon}$), como en la electroestática , a la que se reducen nuestras fórmulas si todas las velocidades se suponen nulas.

En cuanto a la cinemática relativista de un medio continuo e indefinido en el que la velocidad límite sea V, es formalmente la misma que en el vacío, sin mas que reemplazar V en el lugar de c.

Introduciendo ambas modificaciones en la fórmula de $\vec{F}_1$, tenemos la fuerza que actúa sobre q_1 cuando está sumergida en el material supuesto:

$$\vec{F}_1 = -\frac{q_1 q_2}{r^3} \frac{1-\frac{\varepsilon\mu}{c^2} v_2^2}{\left[1-\frac{v_2^2-(\vec{v}_2\cdot\vec{r}/r)^2}{c^2}\varepsilon\mu\right]^{3/2}} \left[\frac{\vec{r}}{\varepsilon} + \frac{\mu}{c^2}\, \vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{r})\right] \quad 8.2$$

Comparándola con el caso del vacío, notamos que en efecto el término de Coulomb queda reducido ε veces (salvo correcciones del orden v^2/c^2), mientras el término de Lorentz resulta independiente de ε (salvo las correcciones antedichas) y afectado en cambio por el factor μ ; son los mismos resultados que halló Faraday y sobre los cuales está edificada la electrotécnica, pues los apartamientos, como él lo intuyera, existen pero están por debajo todavía de la verificación experimental directa.-

Disponiendo ahora de las fórmulas cerradas para la acción entre cargas, retomamos el cálculo de las fuerzas entre conductores, que en el párrafo II §5 resolvimos para conductores paralelos y en primera aproximación solamente.

Sean pues dl_1 y dl_2 dos trozos de conductores metálicos, orientados ambos de manera arbitraria en el espacio, y recorridos por las corrientes de intensidades constantes i_1 , i_2 , cuyo sentido definimos por el de avance de los electrones dentro del alambre.

Cada trozo de metal es eléctricamente neutro, en el sentido que posee cargas positivas y negativas de igual valor, que escribimos

$$q_1^+ = N_1 e s_1 \, dl_1 \qquad q_1^- = -q_1^+$$

$$q_2^+ = N_2 e s_2 \, dl_2 \qquad q_2^- = -q_2^+$$

con notación similar a la del ejemplo ya calculado.

La ley elemental de fuerzas la obtenemos calculando con la 7.2 , la acción sobre una y otra carga del elemento 1, por ejemplo;

sobre la carga positiva (fija) del conductor, tenemos

$$\vec{F}_1^+ = -\frac{N_1 e s_1 dl_1 \; N_2 e s_2 dl_2}{r^3} \, \frac{\vec{r}}{\varepsilon} \left\{ 1 - \frac{1 - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} v_2^2}{\left[1 - \frac{v_2^2 - (\vec{v}_2 \vec{r}/r)^2}{c^2} \varepsilon\mu \right]^{3/2}} \right\}$$

donde los dos términos del corchete representan respectivamente la acción de las cargas positivas y negativas del elemento dl_2.

Sobre las cargas negativas del conductor 1 obtenemos una fórmula mas completa, pues están en movimiento y aparece un término que depende de su velocidad media:

$$\vec{F}_1^- = + \frac{N_1 e s_1 dl_1 \, N_2 e s_2 dl_2}{r^3} \left\{ \frac{\vec{r}}{\varepsilon} \left\{ 1 - \quad \right\} - \frac{\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{r})}{c^2} \mu \, \frac{1 - v_2^2/c^2 \, \varepsilon\mu}{\left[1 - \frac{v_2^2 - (\vec{r}\cdot\vec{v}_2/r)^2}{c^2} \varepsilon\mu \right]} \right\}$$

Si el metal del conductor 1 poseyera resistencia óhmica nula, la fuerza $\vec{F}_1^-$ aplicada a sus electrones debería ser descompuesta en dos partes, según el eje y según la normal al eje del conductor. Esta última componente sería trasmitida al metal propiamente dicho, pues los electrones no pueden escapar a través de su superficie y empujarían al metal. En cambio, la componente longitudinal de la fuerza produciría sencillamente una aceleración en los electrones, que resbalarían sin rozamiento a lo largo del hilo: en un superconductor la corriente continua en un conductor vecino debe aparentemente inducir corrientes, y la acción entre conductor normal y superconductor debe dar una fuerza distinta de la ordinaria.

En el caso de conductores normales, la resistencia viscosa aplica contra el metal toda la fuerza $\vec{F}_1^-$ que reciben los electrones, y la ley de fuerzas se obtiene por suma simple.

Introduciendo la intensidad de corriente, $i = N e s v$:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_1^+ + \vec{F}_1^- = - \frac{i_1 i_2}{c^2 r^3} \mu \; d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \vec{r}) \cdot \frac{1 - (v_2^2/c^2)\cdot\varepsilon\mu}{\left[1 - \frac{v_2^2 - (\vec{r}\cdot\vec{v}_2/r)^2}{c^2} \varepsilon\mu \right]^{3/2}}$$

Salvo por el último factor - que difiere de uno en una cantidad por debajo de toda posible medida actual - reconocemos en esa fórmula la expresión elemental hallada por Grassmann en 1845.

Es bien conocida la controversia sobre la ley elemental de fuerzas entre conductores entre Biot y Savart por una parte, Ampére por la otra, y los continuadores de las ideas de éste y de aquellos. En la electrodinámica de Maxwell se llega a esta fórmula diferencial solamente como abstracción, pues se parte de expresiones integrales extendidas sobre circuitos cerrados. Es fácil demostrar en tales condiciones que todas las fórmulas elementales son matemáticamente equivalentes una vez integradas. Dedicaremos el párrafo 9 a este problema.-

9.- Acción y reacción

En época de Ampère, el principio de que "las mú-"tuas acciones de dos cuerpos son siempre iguales y dirigidas en "sentido opuesto"(I.Newton, Principia...,III, 3a ley del movimiento, 1687), era reconocido como uno de los más generales, sino el mas general, de toda la física (era desconocida incluso la conservación de la energía; ver I §2 y I §5) . No es de extrañar que Ampère se haya preocupado sobre todo de hacer que sus fórmulas electrodinámicas estuvieran de acuerdo con dicho principio, y que combatiera las fórmulas rivales de Biot y de Savart en que "acción" y "reacción" no son simétricas.

En efecto, es tan precisa en la mecánica de Newton la simetría de las fuerzas que se ejercen mútuamente dos cuerpos cualesquiera y en cualesquiera condiciones, que en el esquema de postulados introducido por E.Mach el "principio de acción y reacción" resulta fusionado con el concepto mismo de masa, y es aplicable por lo tanto a todos los casos en que la masa esté definida (ver II §4).

En la electrodinámica por el contrario, el éxito del planteo de Maxwell -~~[illegible]~~-Lorentz relegó a segundo término la falta de simetría en las fuerzas (ver I §11). En la mecánica relativista,(surgida hacia la misma fecha que la interpretación de Max Abraham de densidad de impulso asignada al vacío para restablecer el balance) , tampoco se cumple la simetría de las fuerzas mútuas, si los puntos de aplicación no son coincidentes (ver II §7).

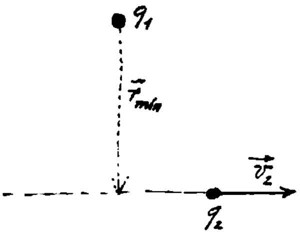
Puesto que en el presente trabajo empleamos cinemática y dinámica relativistas, las fuerzas que se ejercen dos cargas q_1 y q_2 en movimiento uniforme no pueden resultar simétricas. Puede comprobarse en la fórmula 8.1 ,que , en efecto, la permutación de índices $1 \rightleftarrows 2$ altera módulo y dirección de la fuerza, además del signo. Incluso en el caso de que una particular elección de velocidades y sistemas de referencia produjera esa simetría, ella no sería covariante.

Si no deseamos atribuir al espacio propiedades ad-hoc para asegurar la validez del principio, debemos en cambio tentar una modificación en su anunciado, que lo haga covariante sin dejar de ser equivalente al enunciado de Newton antes transcripto. Tal es el objeto del presente párrafo.

Comencemos por ocuparnos de la fuerza que actúa sobre una carga q_1 en reposo, (la 8.1 con $\vec{v}_1 = 0$)

$$\vec{F}'_1 = \vec{F}_1 = -\frac{q_1 q_2}{r^3} \frac{1 - v_2^2/c^2}{\left[1 - \frac{v_2^2 - (\vec{v}\cdot\vec{r}/r)^2}{c^2}\right]^{3/2}} \vec{r}. \quad 2.11$$

Es una fuerza dirigida según la recta que une q_1 con q_2 en el sistema propio de q_1, en función de coordenadas é instante en dicho sistema, que en este párrafo y los siguientes llamaremos sistema S'. La fuerza resulta variable, debido al movimiento de q_2, con lo que $\vec{F}'_1 = \vec{F}'_1(t'_1)$ es una función unívoca del tiempo t'_1 propio de q_1.



Convengamos ahora en la puesta en hora de los relojes propios de q_1 y de q_2 de tal manera que marquen $t' = t'' = 0$ cuando la distancia entre ambas cargas sea mínima. Esta elección - que en nada restringe la generalidad de las consecuencias mientras nos limitemos a movimientos rectos y uniformes - tiene en cambio ventajas operatorias; el pasaje al sistema en que q_2 está en reposo se reduce a una transformación <u>simple</u> de Lorentz.

En estas condiciones, es fácil probar la validez del enunciado simétrico siguiente:

<u>La fuerza $\vec{F}'_1 = \vec{F}'_1(t'_1)$ que un observador ligado a q_1 mide como ejercida por q_2, tiene una ecuación horaria idéntica a la que un observador ligado a q_2 hallaría para la fuerza $\vec{F}''_2 = \vec{F}''_2(t''_2)$ ejercida en ese sistema por q_1.</u>

O, si se prefiere: con relojes y dinamómetros físicamente idénticos, a iguales indicaciones numéricas de los relojes propios de q_1 y q_2 corresponden iguales indicaciones numéricas de los dinamómetros fijos a ellas.

Este enunciado está de acuerdo con el principio de relatividad en su enunciado original - del cual es casi una perífrasis - y representa al mismo tiempo una mínima modificación en el enunciado de Newton, el que, como señalamos antes, no es directamente transcriptible a la relatividad.

La puesta en cero de los relojes adoptada es cómoda, pero no imprescindible; cualquier otra convención que asigne a un par cualquiera de valores iguales de las fuerzas el mismo valor en los relojes, asegura la subsiguiente correspondencia, como puede verificarse algebraicamente.

Pasemos ahora a estudiar el juicio de un solo observador; si en lugar de usar instrumentos propios para cada carga se opta por medir ambas fuerzas en un mismo sistema, forzosamente se introduce una arbitraria decisión de simultaneidad, y las medidas no tienen porqué resultar iguales. Por ejemplo, en el caso q_1 en reposo, podemos medir la fuerza $\vec{F}_2'$ sobre la carga q_2 en el <u>mismo</u> instante en que medimos $\vec{F}_1'$, <u>mediante un dinamómetro del sistema propio de q_1</u>. Dará entonces

$$\vec{F}_2' = \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}$$

y la suma $\vec{F}_1' + \vec{F}_2'$ no es nula.

El observador ligado a q_1 que ha medido de este forma ambas fuerzas, en un mismo instante de su propio sistema, deberá concluir que el conjunto de las dos cargas posee un cierto impulso, ad-hoc, cuya derivada temporal provea la fuerza que le "falta".

10.- Suma de fuerzas simultáneas.

En primer lugar, habrá que tener en cuenta que dos cargas eléctricas situadas a una distancia r suponen una energía potencial $q_1 q_2 / r$; el hecho de que una de ellas sea móvil no altera este resultado, como se puede verificar de inmediato.

En consecuencia, el conjunto de dos cargas posee una inercia adicional $q_1 q_2 / c^2 r$, que puede ser positiva o negativa según los signos, y que existe siempre además de la inercia de la masa que porte las cargas.

La masa equivalente a esta energía electrostática da origen a un cierto impulso, debido al movimiento. Si ambas cargas fuesen móviles con igual velocidad, no dudaríamos que el impulso a añadir valdría $(q_1 q_2 / c^2 r)\, \vec{v}$, siendo $\vec{v}$ la velocidad, supuesta común, de ambas cargas. Si estuvieran, en cambio, ambas cargas en reposo, el impulso a añadir sería cero.

El caso que estudiamos, con una carga móvil con veloc. v, tendrá entonces un impulso debido a esta causa

$$\vec{G}'_e = k \frac{q_1 q_2}{c^2 r} \vec{v}$$

donde k es un factor entre 0 y 1 , que ahora calcularemos, valiéndonos del siguiente razonamiento:

Si en un sistema en que q_1 está en reposo hemos medido la energía E' y el impulso correspondiente a ella G'_e, desde un sistema en que q_2 esté en reposo habríamos hallado una energía E'' y un impulso correspondiente $\vec{G}''_e$; la relación entre estos valores y los primitivos será, claramente (II, 5.6 y 5.7)

$$E'' = \beta_v (E' - v G')$$

$$G''_e = \beta_v \left(G' - \frac{v}{c} E'\right)$$

expresadas todas las variables en función del tiempo t' del sistema de q_1 .

Pero por la equivalencia de ambos sistemas de referencia, a iguales valores numéricos de t' y de t'' deben corresponder valores numéricos iguales de E' y E'', respectivamente; lo que puede escribirse también, con un simple cambio de nombre en la variable,

$$E''(t'') = E''(t') = E'(t')$$

Esta condición, que resulta evidente solamente si suponemos por ahora iguales las cargas, pues no hay entonces diferencia física entre el "sistema S' " y el "Sistema S'' ", conduce, reemplazando en las ecuaciones de transformación, a hallar que

$$k = \frac{\beta_v}{1+\beta_v}$$

Al mismo resultado se llega apoyándonos en que deben ser también $\vec{G}'_e = -\vec{G}''_e$.

Finalmente, para comprender que el resultado es válido aun cuando las cargas sean numéricamente distintas entre sí, es suficiente imaginarlas formadas por reunión de un gran número de cargas idénticas, arbitrariamente pequeñas, y construir la energía total por adición de las energías de todos esos sistemas elementales.

Llegamos, pues, a que el conjunto de dos cargas q_1 y q_2 de las cuales la segunda tiene velocidad $\vec{v}$, posee un impulso adicional proveniente de su energía potencial, que vale

$$\vec{G}'_e = \frac{\beta_v}{1+\beta_v} \frac{q_1 q_2}{c^2 r} \vec{v} = -\frac{\beta_v}{1+\beta_v} \frac{q_1 q_2}{c^2} \vec{v} \int_{-\infty}^{t'} \vec{F}'_2 \cdot \vec{v}\, dt'$$

Además, la mecánica relativista debe atribuir otro impulso al conjunto, vinculado a la falta de sincronismo de los relojes propios de q_1 y de q_2. (ver pág. 115).

Imaginemos posible para cada observador ligado a las cargas ~~[illegible]~~ suspender a voluntad la acción de las fuerzas que obran sobre su propia carga, a voluntad, mediante un "blindaje" adecuado. Supongamos que ambos observadores hayan convenido en interrumpir las acciones en el mismo instante, por ejemplo en el instante τ . Como los relojes de ambas cargas no pueden ser comparados directamente, la única acepción posible de este convenio es que cada uno interrumpa la acción sobre su propia carga cuando su propio reloj marque τ . Es la transcripción relativista de la frase "ambas fuerzas dejan de actuar en el mismo instante".

Ahora bien, el observador situado en q_1 interrumpirá la acción sobre esta carga cuando $t' = \tau$; pero verá que su colega en q_2 se demora, y que la acción sobre q_2 se interrumpe en el instante $t' = \beta_v \tau$; porque esa sería la indicación de un reloj del sistema fijo a q_1, situado junto a la carga móvil en el momento en que esta interrumpa su acción, por ser $t'' = \tau$.

De esta manera, el que mide desde q_1 verá actuar sola a la fuerza F_2 entre los instantes $t' = \tau$ y $t' = \beta\tau$, y deberá atribuir por esta causa un nuevo impulso al conjunto, que calculará

$$\vec{G}_t' = \int_{\tau}^{\beta\tau} \vec{F}_2' \cdot dt'$$

En total tenemos un impulso adicional - que habrá que añadir al impulso mecánico correspondiente a las masas portadoras de las cargas, que aquí no necesitamos considerar,

$$\vec{G}' = \vec{G}_e' + \vec{G}_t' .$$

Resta ahora calcular la fuerza adicional que es originada por la derivada temporal de este impulso, en el instante τ.

$$\frac{d}{d\tau}\left(\vec{G}_e' + \vec{G}_t'\right) = -\frac{\beta_v^2}{1+\beta_v}\,\frac{\vec{v}}{c^2}\,\vec{F}_2(\beta\tau)\cdot\vec{v} + \beta_v \vec{F}_2(\beta_v\tau) - \vec{F}_2(\tau)$$

Para calcular el segundo término, recordemos que

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t, \text{ de donde } \vec{r}\cdot\vec{v} = v^2 t,$$

por la forma en que elegimos el origen de tiempo. En consecuencia, en el instante $\beta\tau$ tendremos

$$\begin{cases} \vec{r}(\beta\tau) = \vec{r}_0 + \vec{v}\beta_v\tau = \vec{r} + \vec{v}t(\beta_v - 1) = \vec{r} + \frac{\vec{v}.\vec{r}}{v^2}(\beta_v - 1)\,\vec{v} \\ r^2(\beta\tau) = r^2 + v^2t^2(\beta_v^2 - 1) = r^2\beta_v^2\left[1 - \frac{v^2 - (\vec{v}.\vec{r}/r)^2}{c^2}\right] \end{cases}$$

y recordando que $\vec{F}_2' = q_1 q_2 \frac{\vec{r}}{r^3}$, obtenemos reemplazando

$$\frac{d}{d\tau}\left(\vec{G}_e' + \vec{G}_t'\right) = -\frac{\beta_v^2}{1+\beta_v}\frac{q_1 q_2}{c^2}\,\vec{v}\,\frac{\vec{r}.\vec{v}}{r^3\beta_v^2[\,]^{3/2}} + \frac{\vec{r}\,q_1 q_2}{r^3\beta_v^2[\,]^{3/2}} + \\ + \frac{\vec{v}(\beta_v - 1)\;\vec{r}.\vec{v}/v^2}{r^3\beta_v^2[\,]^{3/2}}\,q_1 q_2 - q_1 q_2\frac{\vec{r}}{r^3}$$

El segundo y cuarto términos, según $\vec{v}$, se anulan al sumar. Queda

$$\frac{d}{d\tau}\left(\vec{G}_e' + \vec{G}_t'\right) = q_1 q_2 \frac{\vec{r}}{r^3\beta_v^2[\,]^{3/2}} - q_1 q_2 \frac{\vec{r}}{r^3} \\ = -\vec{F}_1'(\tau) - \vec{F}_2'(\tau)$$

Es decir, la variación temporal del impulso $\vec{G}_e' + \vec{G}_t'$, da exactamente cuenta del hecho de que las dos fuerzas $\vec{F}_1' + \vec{F}_2'$, sumadas, no se anularan. El observador fijo a q_1 ha justificado así de manera completa el que sus mediciones simultáneas mostraran la existencia de una "fuerza complementaria : ella es imputable a un impulso vinculado a la energía potencial del sistema, en parte, y en parte a un impulso sui-generis, no vinculado a la energía sino a la forma de medir los tiempos. -

11.- Conclusiones

El conjunto de ejemplos de electrodinámica de las corrientes constantes que hemos presentado (§§ 5 hasta 10) muestra que todos los efectos ponderomotrices o de inducción que tienen lugar entre cargas y conductores son imputables a efectos relativistas en las acciones eléctricas .

Nuestros propósitos quedan con ello cumplidos, y la multiplicación de ejemplos alargaría indefinidamente este trabajo sin agregar nada a la idea esencial.

Preferimos interrumpir aquí los ejemplos , para dedicar las líneas finales al esbozo de las etapas posteriores que este planteo de la electrodinámica sugiere:

---- En primer lugar, es obvio que convendrá realizar la transcripción cuadridimensional de todo el formalismo.

En este caso, la fuerza de Minkowski ($K_i = \vec{F}_i\beta$ $K_4 = \beta \frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{c^2}$) tendrá mas importancia que la densidad de fuerza que se emplea ordinariamente, como tetravector; probablemente resulten con ello alteraciones secundarias en el formalismo actual, pero que mantendrá, naturalmente, toda su validez.

---- En segundo lugar, convendrá tentar la generalización a movimientos acelerados.

En este problema el desarrollo de los potenciales retardados dá origen a series , estudiadas por L.Page y por P.A.M. Dirac (Proc. Roy. Soc., 167, 148; 1938), y no hemos querido mezclar las dificultades matemáticas, que allí esperan, con las dificultades conceptuales - únicas dificultades - del presente trabajo.

Es en esta generalización donde son de esperar los frutos mas interesantes de nuestro punto de vista, puesto que deberá darse cuenta de los fenómenos de inducción en corriente variable, radiación (fórmula de Larmor), etc.

Los cálculos en primera aproximación muestran fácilmente que el camino está expedito.

---- Queremos decir algo sobre imanes. La equivalencia entre un imán permanente y una corriente circular es de la época de Ampère; los fenómenos entre imanes, o entre imán y hierro, deben ser descriptibles mediante un formalismo puramente electrodinámico, como el nuestro.

Pero el problema no es fácil en esta etapa. Es necesario disponer previamente de las ecuaciones para movimiento acelerado de cargas, aun en casos en que aparentemente el movimiento es uniforme.

Por ejemplo, la imanación del hierro por aproximación a otro imán o por efecto de una corriente eléctrica continua, requiere disponer de ecuaciones para espiras rotatorias, antes de poder calcular la energía del proceso.

Convendrá recordar que el cálculo de la energía de magnetización de un hierro tampoco es fácil con el formalismo de la usual teoría electromagnética. Puede verse en el tratado de Becker-Döring, "Ferromagnetismus", por ejemplo, la dificultad de un cálculo que es aparentemente trivial. Ya Maxwell señaló (ver pág.) que según sea el modelo adoptado para el imán, el signo de la energía se hace positivo o negativo!

Esta es la razón por la que la palabra imán no ha sido empleada por nosotros en este primer trabajo.

---- Otra dirección de avance se refiere a la electrodinámica de los medios materiales, de la que apenas hemos hecho una aplicación ( ).

La dificultad aquí radica en que aún no existe una teoría relativista satisfactoria para los medios materiales. En nuestro ejemplo hemos hablado de medio indefinido, pero la presencia de un contorno en el medio sería suficiente para complicar de manera por ahora insoluble la situación.

En consecuencia, parece prudente emprender este camino solo después de disponer de un conjunto firme de ecuaciones relativistas para medios no vacíos (si es que tal conjunto existe).

El efecto Cherencov (radiación emitida por electrones de alta velocidad en un dieléctrico), y las leyes macroscópicas conocidas, han seguramente de ayudar en esta empresa.

---- Finalmente, el blanco hacia el cual está dirigido este trabajo, es la posible vinculación entre este formalismo y la cuántica.

Puesto que la cuántica limita - por ahora - su programa a buscar entre las ecuaciones clásicas la que mas parezca adecuarse al problema entre manos, para decretar luego la traducción de todos los símbolos al lenguaje "operatorio", nos ha parecido que una revisión de todos los conceptos y fórmulas en uso en la electrodinámica clásica, deberá forzosamente concluir por mostrar su influjo en la cuántica.

No tendría sentido señalar aquí vías (por otra parte, es el mismo plan trazado, aunque con otro esquema, por Dirac en su nota de 1938 antes citada).

---- Como tema lateral, surge involuntario el que hemos mencionado en pág. : comparación entre este formalismo y la relatividad general.

Hemos visto ya que resultan los mismos fenómenos gravitatorios que la métrica no-euclídea prevé . Pero antes de hallar los tres resultados famosos de la relatividad general convendrá haber resuelto muchos problemas previos de electrodinámica de las corrientes variables.

Y último, pero no olvidado, resurge aquí uno de mis antiguos cariños: la superconductividad, de la que me he ocupado bastante tiempo, sin correspondencia.

En efecto; es sabido que el efecto Meissner-Ochsenfeld puede tomarse como un fracaso de las ecuaciones de Maxwell en un caso macroscópico. Fué precisamente el mismo Maxwell el que calculó que es lo debía esperarse en un metal con resistencia óhmica nula; y la experiencia de 1933 mostró que sucedió lo contrario.

Nuestro formalismo nos ha permitido algunas predicciones sobre comportamiento de los superconductores (pág. 150) muy sencillas, pero que no resultaban del formalismo común. ¿Será posible obtener otros resultados al respecto, y mostrar que las ecuaciones de Maxwell son aptas para conductores filiformes y con resistencia óhmica, pero no para conductores macizos, simplemente conexos y con resistencia nula?

La respuesta existe, y confiamos poder hallarla.-

Nota 1, pág 126

Para comodidad del lector, reproducimos aquí los párrafos mencionados en el texto, del conjunto de conferencias de Einstein llamado "The meaning of Relativity". Usamos la traducción Prélat, Edit. Espasa-Calpe, 1948.

pag. 127:

$$(118)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{dl}\left[(1+\bar{\sigma})\vec{v}\right] = \mathrm{grad}\,\bar{\sigma} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial l} + \left[\mathrm{rot}\,\vec{A} \times \vec{v}\right] \\ & \bar{\sigma} = \frac{\kappa}{8\pi}\int \frac{\sigma\, dV_0}{r} \\ & \vec{A} = \frac{\kappa}{2}\int \frac{\sigma \frac{dx^\alpha}{dl}\, dV_0}{r} \end{aligned} \right.$$

"Las ecuaciones del movimiento (118) demuestran que, en efec-
"to:

"1. La masa inerte es proporcional a $1+\bar{\sigma}$ y, por lo tanto, aumenta cuando las masas ponderables se aproximan al cuerpo considerado.

"2. Existe una acción inductiva de las masas aceleradas, del mismo signo, sobre el cuerpo considerado, dada por el término $\frac{\partial \vec{A}}{\partial l}$

"3. Una partícula material que se mueve perpendicularmente al eje de rotación dentro del cuerpo hueco que gira, es desviada en el sentido de la rotación (campo de Coriolis). La acción centrífuga antes mencionada, dentro de un cuerpo en rotación, también se deduce de la teoría, como ha sido demostrado por Thirring.

"Aun cuando todos esos efectos no son revelables mediante la
"experiencia debido a que κ es demasiado pequeño, existen cierta-
"mente de acuerdo con la teoría general de la relatividad".

" σ es la densidad en reposo, esto es, la densidad de la ma-
"teria ponderable en el sentido ordinario..."(pág.111)

Para obtener identidad completa entre las ecuaciones anteriores de Einstein, y las nuestras, recordemos que nosotros nos hemos limitado al caso en que la partícula está en reposo. Con ello el miembro izquierdo representa sencillamente la fuerza que actúa sobre ella, y desaparece el tercer término del segundo miembro.

Einstein escribe $l = x_4 = t$, y $c = 1$. El signo del potencial está tomado, según la costumbre en mecánica, contrario al nuestro.—

Nota (1) - pág. 134. Este ejemplo fué el primer resultado que obtuve, y el origen de todo el presente trabajo. Lo hallé en Marzo 1950, en forma independiente y con meros fines didácticos. No pudiendo creer en que el asombroso resultado fuera a la vez correcto y original, revisé toda la bibliografía a mi alcance y consulté a cuantos pude, personalmente y por carta.

Por fin, convencido de su originalidad, publiqué el ejemplo en Anales de la Soc. Cient. Arg., 151, p.25, 1951, indicando allí los antecedentes por mí conocidos, que son los siguientes:

Weber, Pogg. Ann., 72, 193; 1848

Weber parece haber sido el primero en tratar de calcular separadamente las fuerzas sobre las partes positivas y negativas del conductor, y trató de idear una ley ad-hoc para reemplazar a la de Coulomb.

Después de él se ocuparon del tema C.Neumann en 1868, H.Helmholtz en 1870, R.Clausius en 1877, F.E.Neumann en 1895.

No he podido consultar sus originales, limitándome a las referencias halladas en

C.F.Gauss, Carta dirigida a Weber en 1845, Werke, 5, 629 (Edición 1867) (Biblioteca Soc.Cient.Arg.)

J.M.Clerk Maxwell Treatise on Electricity and Magnetism, 2° tomo. (Biblioteca Soc. Cient.Arg.)

Contiene varios capítulos dedicados como homenaje a la teoría de la acción a distancia de Ampére y continuadores, y un excelente resumen histórico.

La búsqueda fué mas fácil para el siglo actual, y hallé y leí los trabajos de

A.Güntherschulze, Zs. f.Ph., 74, 692 (1932), quien enunció claramente su propósito de calcular la atracción entre conductores paralelos empleando solamente acciones eléctricas. Su cálculo fué sin embargo erróneo (no trató de emplear relatividad correctamente), y motivó agrias respuestas de

A.D.Fokker y C.J.Gorter, Zs. f.Ph., 77, 166 (1932), quienes recuerdan los trabajos previos de Weber, etc., y concluyen que el camino es impracticable.

E.Klein, Zs.f.Ph. 76, 415 (1932) fué un poco menos áspero en su crítica, pero tampoco aportó contribución.

G.Eibenschütz, en Atti Acad. Lincei, 17, 161 (1933), en una nota presentada a la Academia por Levi-Civita, calculó la atracción empleando la fuerza de Lorentz ordinaria, como aclaración a Güntherschulze. Por lo tanto, no parece haber entendido la esencia del problema, que era precisamente prescindir de la fuerza de Lorentz.-

Finalmente, estando ya mi trabajo impreso en los Anales, mi colega y amigo el Prof. L.P.Pérez del Cerro me señaló, el 3 de Enero de 1951, la existencia del libro de E.Geoffrey Cullwick "Fundamentals of Electromagnetism", impreso en Cambridge, 1939, enel cual se hacen declaraciones de propósitos similares a las de la presente tesis, pero se realiza un solo cálculo, que es precisamente el de la atracción de corrientes paralelas, en forma completamente equivalente a la empleada por mí.

Viendo que el Prof. Cullwick había publicado once años atrás el cálculo que yo reencontrara, le escribí inmediatamente, para preguntarle en qué publicación había presentado por primera vez su trabajo, y si tenía resultados posteriores sobre corrientes en direcciones arbitrarias, principio de acción y reacción, etc., pues yo ténía ya hecho todo ello.

El Prof. Cullwick me respondió desde su actual dirección (Univ. de St.Andrews, Dundee, Scotland):

" The problem of the force between moving charges is "indeed a fascinating one, and from your brief explana- "tion of your work I gather that you have reconciled ac- "cepted theory with the application of relativity theory "to electrostatic forces, for the general case when current- "elements are not-parallel. This is indeed interesting.
"You ask if I have developed the idea further since "my book was published. I am afraid the answer is 'no'."

" ...my development of the case of parallel conductors "in my book was quite original,"..."Ihave since come across "a paper which develops the same idea"...

El trabajo a que se refiere Cullwick es el de

S.C.Kar, Phil.Mag.,44,376, 1922,

el que, a mi juicio, no tiene otra semejanza con los nuestros que la de emplear electrones y cargas positivas en el conductor, pero calculando de manera ortodoxa mediante la fuerza de Lorentz. Es evidente que Kar no pensaba en efectos eléctricos puros.

En consecuancia, continúo considerando a Cullwick como el autor original del ejemplo que aquí he detallado, y que, como dije antes, publiqué como introducción a mis trabajos sobre el tema sin conocer ese precedente.-

(3)- pág.135 . Las medidas sobre superconductores son excepcionalmente difíciles, pues el material se encuentra siempre sepulto en un triple vaso de Dewar para asegurar su aislación térmica (la temperatura es del orden de -270°C)
Por esta razón no se han hecho nunca medidas de acciones ponderomotrices entre superconductores y metal común. La afirmación que hacemos en el texto no tiene hasta el momento ningún estudio experimental.
(en cambio, es bien sabido que las ecuaciones de Maxwell no son aplicables completamente a los superconductores, debido al efecto llamado Meisner -Ochsenfeld)

(4) - pág 143. Fórmulas 7.6

Cálculo de $\vec{r}_p'$: Según 2 y 5, para las cargas positivas:

$$\vec{r}_p' = \vec{r} - \vec{V}\left\{\frac{\vec{r}.\vec{V}}{V^2}(1-\beta_V) + \beta_V\frac{\vec{V}.\vec{r}}{c^2}\right\}$$

$$= \vec{r} - \vec{V}\frac{(\vec{r}.\vec{V})}{V^2}\left\{1-\beta_V+\beta_V\frac{V^2}{c^2}\right\}$$

y como $\beta_V\frac{V^2}{c^2} = \beta_V - \frac{1}{\beta_V}$, llegamos a la $\vec{r}_p'$ del texto (6)

Cálculo de $\vec{r}_n'$:

Según 2 y 5, para las cargas ~~positivas~~ negativas:

$$\vec{r}_n' = \vec{r} - \vec{V}\left\{\frac{\vec{r}.\vec{V}}{V^2}(1-\beta_V)\right\} + \left\{\vec{v} - \vec{V}\beta_V + \frac{\vec{v}.\vec{V}}{V^2}(1-\beta_V)\right\}\frac{\vec{V}.\vec{r}}{c^2}\,\frac{1}{1-\frac{\vec{v}.\vec{V}}{c^2}}$$

$$= \vec{r} + \vec{v}\,\frac{\vec{r}.\vec{V}}{c^2}\,\frac{1}{1-\frac{\vec{v}.\vec{V}}{c^2}} - \vec{V}\frac{\vec{r}.\vec{V}}{V^2}\left\{1-\beta_V+\frac{\beta_V V^2/c^2 + \frac{\vec{v}.\vec{V}}{c^2} - \vec{v}.\vec{V}\beta_V/c^2}{1-\frac{\vec{v}.\vec{V}}{c^2}}\right\}$$

y de aquí se pasa a la $\vec{r}_n$ del texto con pocas simplificaciones de términos que se compensan exactamente.

---

(5) pág 144. Fórmulas 7.7

Calcularemos aquí $\vec{F}_n'$, que es la expresión mas compleja de las dos, debido al movimiento de las cargas, $\vec{v}_n$. Una vez obtenida $\vec{F}_n'$, la expresión para $\vec{F}_p$ resulta: 1º) cambiando el signo, debido a $+q$, y 2º) haciendo $\vec{v}=0$.

Según la fórmula de la fuerza eléctrica en general,

$$\vec{F}_n' = \beta_{v_n'}\frac{q\,Q\,\vec{r}_n'}{\left\{r_n'^2 + \beta_{v_n'}^2\left(\vec{r}'.\vec{v}_n\right)^2/c^2\right\}^{3/2}}$$

donde

$$\vec{r}_n' = \vec{r} + \left[\frac{\vec{V}}{V^2}\left(\frac{1}{\beta_V}-1\right) + \frac{\vec{v}}{c^2}\right]\frac{\vec{r}.\vec{V}}{1-\frac{\vec{v}.\vec{V}}{c^2}}\,, \text{ según } 6.$$

Elevando al cuadrado y operando, resulta después de algunas transformaciones,

$$r'^{2}_{n} = \frac{1}{\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{V}}{c^2}\right)^2}\left[r^2\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{V}}{c^2}\right)^2 - \frac{\vec{r}\cdot\vec{V}}{c^2}\frac{1}{\beta_v^2} + 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{c^2}\,\vec{r}\cdot\vec{V}\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{V}}{c^2}\right)\right]$$

Por otra parte, efectuando el producto $\vec{r}'_n\cdot\vec{v}'_n$ se llega, luego de prolongadas pero sencillas transformaciones, a

$$\vec{r}'_n\cdot\vec{v}'_n = \frac{1}{\beta_V\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{V}}{c^2}\right)^2}\left[\vec{r}\cdot\vec{v}\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{V}}{c^2}\right) - \frac{\vec{r}\cdot\vec{V}}{\beta_v^2}\right].$$

Con lo cual, recordando la identidad (3.4): $\beta_{v'} = \beta_v\beta_V\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{V}}{c^2}\right)$,

$$\beta_{v'}^2\frac{(\vec{r}'\cdot\vec{v}'_n)^2}{c^2} = \frac{\beta_v^2}{\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{V}}{c^2}\right)^2}\left[\frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{c}\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{V}}{c^2}\right) - \frac{\vec{r}\cdot\vec{V}}{c\,\beta_v^2}\right]^2$$

Llevamos ahora a la llave en el denominador de $\vec{F}'_n$:

$$\{\ \} = \frac{1}{\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{V}}{c^2}\right)^2}\left[r^2(\ )^2 - \frac{\vec{r}\cdot\vec{V}}{c^2}\frac{1}{\beta_v^2} + 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{c^2}\,\vec{r}\cdot\vec{V}(\ ) + \frac{(\vec{r}\cdot\vec{v})^2}{c^2}(\ )^2\beta_v^2 + \frac{(\vec{r}\cdot\vec{V})^2}{c^2\beta_v^2} - \frac{2(\vec{r}\cdot\vec{v})(\vec{r}\cdot\vec{V})}{c^2}(\ )\right]$$

y al simplificar queda

$$\{\ \}^{3/2} = \left\{r^2 + \frac{(\vec{r}\cdot\vec{v})^2}{c^2}\beta_v^2\right\}^{3/2} = r^3\beta_v^3\left\{1 - \frac{v^2 - (\vec{v}\cdot\vec{r})^2/r^2}{c^2}\right\}^{3/2}$$

Reconocemos aquí el denominador de la form. 7 del texto. El numerador es inmediato.—